Vícekriteriální hodnocení variant a analýza citlivosti při výběru produktů finančních institucí

Zdeněk Zmeškal [1]

Abstrakt

V příspěvku jsou popsány metody vícekriteriálního hodnocení variant, jejich kategorizace a postup řešení. Detailně byly popsány metody stanovení vah, kritérií na bázi funkce užitku a souhrnné kritérium typu váženého součtu a kompromisního řešení. S ohledem na význam vstupních dat jsou dále odvozena a stanovena základní pravidla pro určení citlivosti vícekriteriálního výběru na stanovené váhy kritérií. Uvedené metody jsou diskutovány s ohledem na výběr produktů finančních institucí.

Klíčová slova

Vícekriteriální hodnocení, váhy, kritéria, analýzy citlivosti, finanční produkt

1 Úvod

Při finančním rozhodování je často nutné brát v úvahu vice než jedno kritérium. K řešení se používají dva přístupy: vícekriteriální hodnocení variant (MADM multiple attribute decision making) v případě, že je možné určit všechny diskrétní varianty včetně ocenění pomocí kritérií a vícekriteriální optimální programování (MODM multiple objective decision making), v tomto případě jsou varianty a kriteria vymezena pomocí funkcí omezujících podmínek a účelových funkcí.

Při aplikaci metod vícekriteriálního hodnocení variant tvoří základ *rozhodovatel* (*subjekt*), *cíl* (*účel*) *rozhodování*, *varianty rozhodování* a *kritéria (podmínky) rozhodování*. Aplikuje-li se tato metoda při výběru produktů finančních institucí, pak rozhodovatelem a subjektem může být například student, rodina s dětmi, důchodce, firma; cílem pak může být například otevření studentského účtu, pojištění na dožití, financování bydlení, dlouhodobá bezriziková investice, získání úvěru pro zajištění financování; variantami mohou být jednotlivé produkty jako například úvěr, cenný papír, druh pojištění; kritérii pak například cena, úrok, poplatky, renomé instituce, velikost instituce, ručení, rychlost získání.

Významné je pak, jaké metody se použijí pro výběr. Ale vzhledem ke kvalitě vstupních dat je důležité posoudit citlivost výběru variant na vstupní údaje a volbu metody. Cílem příspěvku je popsat metody vícekriteriálního hodnocení variant a metodu citlivosti výběru variant hodnoty vah kritérií.

2 Popis metod vícekriteriálního hodnocení variant

Účelem (cílem) aplikace úloh vícekriteriálního hodnocení variant je: (a) nalezení nejlepší (optimální) varianty, (b) uspořádání variant od nejlepší po nejhorší, (c) uspořádání variant do hierarchických shluků, (d) rozdělit varianty na dvě skupiny, na akceptovatelné a

[1] Zdeněk Zmeškal, prof. Dr. Ing., VŠB-TU Ostrava, Ekonomická fakulta, Sokolská 33, Ostrava, Zdenek.Zmeskal@VSB.CZ.
Tento příspěvek vznikl v rámci řešení projektu podporovaného Grantovou agenturou České republiky č. 402/08/1234.

neakceptovatelné, (e) stanovit množinu efektivních (nedominovaných, paretovských) variant anebo vyloučit neefektivní varianty.

Podle typu informací vyjadřující preference kritérií nebo variant se dají úlohy dělit následovně: (a) bez informace o preferencích kritérií (s informacemi o preferencích variant), (b) s informacemi o aspiračních úrovních (prazích citlivosti, mezních hodnotách) kritérii, (c) s ordinálními (o uspořádání) informacemi o kritériích a variantách, (d) s kardinálními (kvantitativními) informacemi o kritériích a variantách (využívají se taktéž metody k transformaci ordinálních informací na kardinální).

Při řešení se zpravidla musí znát upravená (normalizovaná) kriteriální matice hodnocení variant *X*, kde x_{ij} je hodnota *j*-tého kritéria pro *i*-tou variantu, vektor vah *w*, kde w_j je normalizovaná váha *j*-tého kritéria,

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & & x_{1N} \\ & x_{ij} & \\ x_{M1} & & x_{MN} \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_j \\ w_M \end{bmatrix}.$$

Podle způsobu konstrukce souhrnného hodnocení se rozlišují tyto koncepce kardinálních kritérií: (a) kritérium váženého součtu (aritmetický průměr), (b) kritérium váženého součinu (geometrický průměr), (c) kompromisní kritérium (cílové programování na bázi minimální vzdálenosti), (d) souhrnná (fuzzy) preferenční relace.

Hodnota kritéria váženého součtu U_i se vypočte takto: $U_i = \dfrac{\sum_j x_{i,j} \cdot v_j}{\sum_j v_j}$.

Hodnota kompromisního kriteria U_i se vypočte takto: $U_i = \dfrac{\sum_j \dfrac{d_{i,j}^-}{d_{i,j}^- + d_{i,j}^+} \cdot v_j}{\sum_j v_j}$, kde $d_{i,j}^-$ a $d_{i,j}^+$ představují vzdálenost od nejmenší a největší hodnoty.

2.1 Metody stanovení kritérií

Kritéria dle typu jsou dvojí: (a) kvalitativní a (b) kvantitativní (vyjádřeno v měrných jednotkách).

Kritéria dle úrovně žádoucí hodnoty se rozlišují na: (a) maximalizační (např. výnosy, zisk) a (b) minimalizační (např. náklady, ztráta).

Pro výpočty a porovnání je zpravidla žádoucí, aby zadané hodnoty kritérií y_{ij} byly normalizovány do jednotkového intervalu, tedy $x_{ij} \in [0;1]$. Obecně se tyto hodnoty dají získat z dílčích funkcí utility takto, $x_{ij} = u(y_{ij})$, které mohou být lineární, progresivní nebo degresivní. Jako příklad těchto funkcí lze uvést lineární funkci utility, $x_{ij} = \dfrac{y_{ij} - D_j}{H_j - D_j}$, kde D_j

je nejmenší a H_j nejvyšší hodnota kritéria. Nebo pro nulovou dolní mez $x_{ij} = \frac{y_{ij}}{H_j}$. Přitom, pokud jsou tyto mezní hodnoty stanoveny jako ideální nebo předem určené, pak se hovoří o metodě bazické varianty, pokud tyto hodnoty představují mezní hodnoty kritérií daných variant, pak se jedná o metodu PATTERN (Planning Assistance Through Technical Evaluation of Relevance Number). Lze se setkat například u metody TOPSIS i s funkcí založenou na Eukleidovské vzdálenosti: $x_{ij} = \frac{y_{ij}}{\sqrt{\sum_i^M y_{ij}^2}}$.

Pro stanovení hodnot kritérií se dá využít i Saatyho metoda párového porovnání popsaná v následující kapitole.

2.2 Metody stanovení vah

Použití vah kritérií slouží k vyjádření preferencí jednotlivých kritérií. Opět je výhodné, aby váhy byly normalizovány do jednotkového intervalu s jednotkovým součtem. Při ohodnocení se mohou použít různé škály se stanovením významnosti kritérií v_j a normalizují se následovně, $w_j = \frac{v_j}{\sum_i^N v_i}$.

Jako příklady metod stanovení preferenčních vah kritérií lze uvést: bodovací, pořadí, párové srovnání (Fullerova), párové srovnání (Saatyho).

2.2.1 Metoda bodovací

U této metody se ohodnotí jednotlivá kritéria přímo body z předem stanoveného intervalu nebo škály. Například analogicky se školním hodnocením, $v_j \in [1;5]$

2.2.2 Metoda pořadí

Kritéria se seřadí podle pořadí od nejdůležitějšího po nejméně důležité. V případě, že jsou některá kritéria považována za stejně důležitá, ohodnotí se průměrem pořadí identických kritérií. Celkový součet lze v tomto případě určit následovně: $\sum_i^N v_i = \frac{N \cdot (N-1)}{2}$.

2.2.3 Fullerova metoda párové porovnání

Princip metody spočívá v tom, že se párově srovnávají jednotlivá kritéria a určí se to, které je významnější. Přitom preference se označí hodnotou 1 a nepreference 0. V případě, že k_i označuje počet preferencí *i-tého* kritéria, se váha stanoví následovně: $w_i = \frac{k_i}{\sum_j^N k_j} = \frac{k_i}{\frac{N \cdot (N-1)}{2}}$ Pro vyjádření preferencí se využívá tzv. Fullerův trojúhelník, a proto se tato metoda někdy nazývá jako Fullerova metoda párového porovnání.

2.2.4 Saatyho metoda párového porovnání

Princip metody spočívá v tom, že se párově srovnávají jednotlivá kritéria a zapíšou se do tzv. Saatyho matice S s prvky $s_{i,j}$, která je symetrická. Přitom se síla preference vyjádří v intervalu $s_{i,j} \in [1;9]$ a základní význam hodnot je následující: 1 rovnocennost, 3 slabá preference, 5 silná preference, 7 velmi silná preference, 9 absolutní preference. Další hodnoty lze využít k vyjádření mezipreferencí. Je zřejmé, že pro diagonální prvky platí, že $s_{i,i} = 1$ a pro inverzní $s_{i,j} = \frac{1}{s_{j,i}}$. Dá se dokázat, že prvky Saatyho matice se dají vyjádřit přibližně jako poměr jednotlivých vah, $s_{i,j} \cong \frac{w_i}{w_j}$. Pak se dají váhy získat pomocí úlohy kvadratického programování následovně.

Úloha 1

U.F. $$\min F = \sum_i^N \sum_j^N \left(s_{i,j} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2 ,$$

(P) $$\sum_i^N w_i = 1 .$$

Podmínkou relevantního hodnocení je, aby Saatyho matice byla konzistentní, tedy aby prvky byly lineárně nezávislé. Konzistentnost se dá posoudit pomocí koeficientu konzistence: $\sigma^2 = \frac{F}{k}$, kde $k = \frac{N \cdot (N-1)}{2} - (N-1) = \frac{(N-1) \cdot (N-2)}{2}$. Přitom $\frac{N \cdot (N-1)}{2}$ je počet párových srovnání a $(N-1)$ je počet lineárně nezávislých kritérií. Za konzistentní se považuje hodnota $\sigma^2 \leq 0{,}1$.

S ohledem na obtížnost řešení úlohy kvadratického programování se dají získat váhy pomocí následného algoritmu založeného na geometrickém průměru.

Úloha 2

U.F. $$\min F = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \left[\ln s_{i,j} - \left(\ln w_i - \ln w_j \right) \right]^2$$

(P) $$\sum_i^N w_i = 1$$

Dá se ukázat, že řešením je $w_i = \dfrac{\left[\prod_j^N s_{i,j} \right]^{\frac{1}{N}}}{\sum_i^N \left[\prod_j^N s_{i,j} \right]^{\frac{1}{N}}}$ vycházející z geometrického průměru řádků.

3 Analýza citlivosti hodnocení variant dle vah

I když dojde k výběru variant, je důležité vědět, zda je tento výběr stabilní a robustní. Jde tedy o to posoudit, jak je uspořádání variant citlivé na změnu hodnot vah a kritérií. Dále bude odvozen způsob posouzení na citlivost vah pro případ kritéria váženého součtu,

$$U_i = \frac{\sum_j x_{i,j} \cdot v_j}{\sum_j v_j} .$$

Nejprve vyjádříme hodnotu souhrnného kritéria pro varianty m a n,

$U_m = \frac{\sum_j x_{m,j} \cdot v_j}{\sum_j v_j}$, $U_n = \frac{\sum_j x_{n,j} \cdot v_j}{\sum_j v_j}$. Hledáme-li mezní hodnotu pro změnu pořadí variant *m* a *n*, pak pro původní relaci platí, že $U_m > U_n$ a po zvýšení k-té váhy pro varianty *m* a *n* o hodnotu $\alpha_k^{m,n}$ na $v_k^{'} = v_k + \alpha_k^{m,n}$ se hodnota relace změní takto,

$U_m^{'} = \frac{\sum_j x_{m,j} \cdot v_j + x_{m,k} \cdot \alpha_k^{m,n}}{\sum_j v_j + \alpha_k^{m,n}}$, $U_n^{'} = \frac{\sum_j x_{n,j} \cdot v_j + x_{n,k} \cdot \alpha_k^{m,n}}{\sum_j v_j + \alpha_k^{m,n}}$. Pak po změně nerovnosti

dosazení do $U_m^{'} < U_n^{'}$, $\frac{\sum_j x_{m,j} \cdot v_j + x_{m,k} \cdot \alpha_k^{m,n}}{\sum_j v_j + \alpha_k^{m,n}} < \frac{\sum_j x_{n,j} \cdot v_j + x_{n,k} \cdot \alpha_k^{m,n}}{\sum_j v_j + \alpha_k^{m,n}}$. Protože jmenovatel je stejný, pak nerovnost platí a lze ji přepsat takto,

$$\sum_j x_{m,j} \cdot v_j + x_{m,k} \cdot \alpha_k^{m,n} \quad < \quad \sum_j x_{n,j} \cdot v_j + x_{n,k} \cdot \alpha_k^{m,n}.$$

Pokud vyjádříme $A_m = \sum_j x_{m,j} \cdot v_j$, $A_n = \sum_j x_{n,j} \cdot v_j$, pak

$$A_m - A_n \quad < \quad (x_{n,k} - x_{m,k}) \cdot \alpha_k^{m,n}.$$

Po úpravě získáme základní pravidla pro stanovení citlivostních mezí vah,

$$\alpha_k^{m,n} \quad > \quad \frac{A_m - A_n}{x_{n,k} - x_{m,k}}, \text{pro } x_{n,k} - x_{m,k} > 0,$$

$$\alpha_k^{m,n} \quad < \quad \frac{A_m - A_n}{x_{n,k} - x_{m,k}}, \text{pro } x_{n,k} - x_{m,k} < 0,$$

$$\alpha_k^{m,n} \quad = \infty, \text{ pro } x_{n,k} - x_{m,k} = 0.$$

Čím menší budou koeficienty $\alpha_k^{m,n}$, tím jsou varianty *m* a *n* citlivější na váhu *k*. Pokud je $x_{n,k} - x_{m,k} = 0$, pak jsou varianty z hlediska váhy rovnocenné a nejsou citlivé na změnu váhy.

4 Závěr

V příspěvku byly popsány metody vícekriteriálního hodnocení variant, jejich kategorizace a postup řešení. Detailně byly popsány metody stanovení vah, kritérií na bázi funkce užitku a souhrnné kritérium typu váženého součtu a kompromisního řešení. S ohledem na význam vstupních dat jsou dále odvozena a stanovena základní pravidla pro určení citlivosti vícekriteriálního výběru na stanovené váhy kritérií.

Literatura

[1] BROŽOVÁ, H., HOUŠKA, M., ŠUBRT, T.: *Modely vícekriteriálního rozhodování*, skripta ČZU

[2] ČERNÝ M., GLÜCKAUFOVÁ D.:*Vícekriteriální vyhodnocování v praxi*, SNTL, Praha, 1982

[3] FOTR, J., DĚDINA, J., HRŮZOVÁ, H.: *Manažerské rozhodování*. EKOPRESS, Praha, 2000.

[4] FIALA, P, JABLONSKÝ, J., MAŇAS, M.: *Vícekriteriální rozhodování*. VŠE, Praha, 1997

[5] RAMÍK J. *Vícekriteriální rozhodování – analytický hierarchický proces* (AHP). Karviná Slezská univerzita v Opavě, 1999. 211s.

[6] TRIANTAPHYLLOU, E., SÁNCHEZ, A. A SENSITIVITY ANALYSIS APPROACH FOR SOME DETERMINISTIC MULTI-CRITERIA DECISION MAKING METHODS *Decision Sciences,* Vol. 28, No. 1, pp. 151-194, Winter 1997.

[7] ZMESKAL, Z. *Finanční modely*. Ekopress Praha, 2004.

[8] ZMESKAL, Z**.** Soft Approach to Company Financial Level Multiple Attribute Evaluation. Conference Information: 21st International Conference on Mathematical Methods in Economics, SEP 10-12, 2003 Prague, CZECH REPUBLIC. PROCEEDINGS OF THE 21ST INTERNATIONAL CONFERENCE MATHEMATICAL METHODS IN ECONOMICS 2003 pp 273-280 Published: 2003.

Summary

There are in the paper methods of multiple attribute decision-making described including their categorisation solution procedure. Methods of weights determination and criteria on function utility basis and comprehensive criteria of additive weighting method and compromise solution conception are described in detail. In respect with significance of input data were derived and stated basic rules for weights sensitivity of multiple attribute criteria. Introduced methods are discussed in respect to choice of financial and insurance products.