Využití algoritmu PSO při hledání portfolia s nejnižším rizikem

Aleš Kresta [1]

Abstrakt

V posledních letech lze pozorovat stále více se prosazující modely inspirované přírodou. Jedním z těchto modelů je i algoritmus rojení částic, který dosahuje velmi dobrých výsledků při určování parametrů neuronových sítí. Příspěvek je zaměřen na možnost využití tohoto algoritmu při hledání optimálního portfolia. Nejprve je stručně charakterizována problematika optimalizace portfolia, poté je obecně popsán algoritmus rojení částic. V aplikační části je tento algoritmus použit při hledání portfolia s minimálním rizikem. Výsledky nalezené tímto algoritmem jsou srovnány s výsledky získanými pomocí tradičních metod nelineárního programování.

Klíčová slova

Portfolio, algoritmus rojení částic, optimalizace.

1. Úvod

Problematika optimalizace portfolia v zásadě představuje problém, ve kterém je potřeba optimálně alokovat určité předem dané množství peněžních prostředků do určité množiny cenných papírů. V zásadě je tedy potřeba minimalizovat riziko a maximalizovat výnos. Harry Markowitz [1] představil mean-varinace model, ve kterém ztotožnil riziko se směrodatnou odchylkou výnosu. Tento základní koncept bude použit i v tomto příspěvku. Jako alternativní model lze uvést například model Konna a Yamazakiho [3] ve kterém je jako ukazatel rizika použita střední absolutní odchylka. Cardinality constrained mean-variance (CCMV) model představený Changem [4] se více blíží praxi, neboť je požadováno, aby z celkového počtu dostupných aktiv bylo investováno jen do několika z nich. Tento model již není řešitelný metodami nelineárního programování a využívají se různé heuristické metody.

Algoritmus rojení částic (particle swarm optimization, PSO) je relativně nová technika, poprvé popsaná v roce 1995 [5]. Také v publikované literatuře tato metoda zatím našla malé uplatnění, použitím tohoto algoritmu při řešení problematiky optimalizace portfolia se zatím zabýval jen Cura [6].

Cílem příspěvku je ověření vhodnosti použití algoritmu rojení částic při hledání optimálního portfolia s minimálním rizikem (směrodatnou odchylkou výnosu tohoto portfolia) a porovnání nalezeného portfolia s výsledkem při použití standardních metod nelineárního programování.

2. Problematika optimalizace složení portfolia

Základy teorie portfolia byly položeny Harry Markowitzem [1], který představil mean-variance model založený na principu očekávaného výnosu a rizika v podobě směrodatné

[1] Ing. Aleš Kresta, katedra financí, Ekf VŠB-TU Ostrava, Sokolská tř. 33, 701 21 Ostrava, email: ales.kresta@vsb.cz.
Tento příspěvek vznikl v rámci řešení projektu podporovaného Grantovou agenturou České republiky č. 402/08/1234.

odchylky tohoto výnosu. Hledaným výsledkem je efektivní množina portfolií, která splňuje jak podmínku maximálního očekávaného výnosu při daném riziku, tak minimálního rizika při daném očekávaném výnosu. Matematicky můžeme model formulovat následovně.

Formulace obecné úlohy pro daný očekávaný výnos

Účelová funkce

$$\sigma_P \to \min .$$

Omezující podmínky

$$\sum_i x_i = 1 , \tag{P1}$$

$$E(R_p) = E(R_p^{požadované}) , \tag{P2}$$

$$x_i \geq 0 \text{, pro } i=1,2,..,N, \tag{P3}$$

kde

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_i \sum_j x_i \cdot \sigma_{ij} \cdot x_j} = \sqrt{\vec{x}^T \cdot C \cdot \vec{x}} , \tag{R1}$$

$$E(R_p) = \sum_i x_i \cdot E(R_i) = \vec{x}^T \cdot E(\vec{R}\ ) . \tag{R2}$$

Účelová funkce vyjadřuje hledanou minimální směrodatnou odchylku portfolia σ_p. Podmínkou (P1) je stanoveno, že součet všech relativních podílů x_i je roven 1, je tedy investováno právě tolik prostředků, kolik je k dispozici. Podmínkou (P2) je zajištěno, že očekávaný výnos $E(R_p)$ efektivního portfolia je roven požadovanému očekávanému výnosu $E(R_p^{požadované})$. Podmínkou (P3) je vyjádřena nemožnost krátkého prodeje. Rovnicí (R1) je formulován výpočet směrodatné odchylky portfolia, rovnicí (R2) je dán výpočet očekávaného výnosu $E(R_p)$.

Vynecháním podmínky (P3), získáváme Blackův model, ve kterém je povolen krátký prodej. Pro jednoduchost je rovněž předpokládán vysoce rizikově averzní investor, kterému nezáleží na výši očekávaného výnosu, ale pouze na minimalizaci směrodatné odchylky, vypustíme tedy i podmínku (P2). V příspěvku je tedy řešen problém nalezení optimálního portfolia, které se vyznačuje nejnižším rizikem. Úloha je následující.

Formulace úlohy pro minimální riziko

Účelová funkce

$$\sigma_P \to \min .$$

Omezující podmínky

$$\sum_i x_i = 1 , \tag{P1}$$

kde

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_i \sum_j x_i \cdot \sigma_{ij} \cdot x_j} = \sqrt{\vec{x}^T \cdot C \cdot \vec{x}} , \tag{R1}$$

$$E(R_p) = \sum_i x_i \cdot E(R_i) = \vec{x}^T \cdot E(\vec{R}\ ) . \tag{R2}$$

Tento problém je snadno řešitelný pomocí metod nelineárního programování, viz např. [7]. Další možností řešení tohoto problému je použití algoritmu rojení částic.

3. Algoritmus rojení částic

Algoritmus rojení částic je stochastický algoritmus hledání globálního optima. Inspirací v přírodě je pohyb hejna při hledání místa nejbohatšího na potravu. Je předpokládáno určité množství částic (zvířat v hejnu), kdy každá částice zná svou zatím nejlepší nalezenou pozici a globálně nejlepší nalezenou pozici. Pohyb této částice může být matematicky popsán pomocí její pozice a rychlosti. Rychlost j-té částice vzhledem k i-té dimenzi prohledávaného prostoru pak můžeme vyjádřit jako

$$v_{ji}(t+1) = w(t+1)v_{ji}(t) + C_1\varphi_1\big(p_{ji} - x_{ji}(t)\big) + C_2\varphi_2\big(g_i - x_{ji}(t)\big), \tag{1}$$

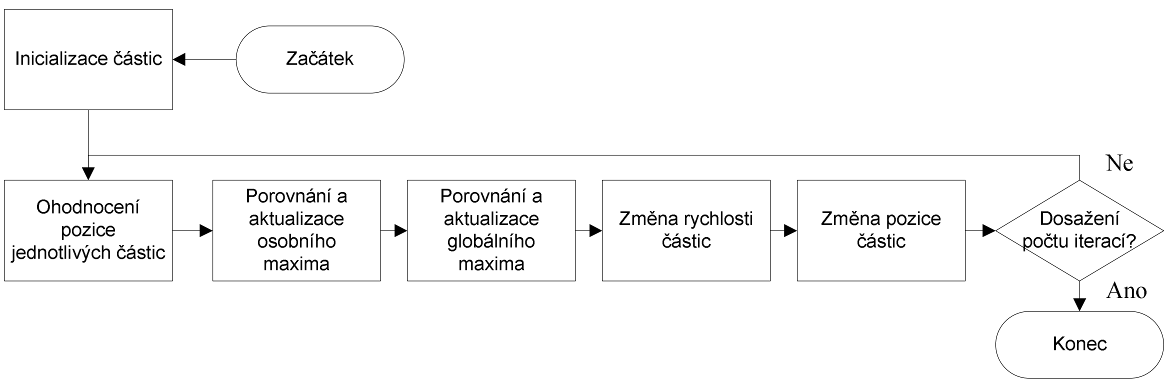
kde $v_{ji}(t+1)$ je rychlost j-té částice v iteraci t+1, $w(t+1)$ udává vliv setrvačnosti rychlosti pohybu částice, C_1 a C_2 jsou konstanty, φ_1 a φ_2 jsou náhodná čísla z intervalu [0,1], p_{ji} je osobní nejlepší pozice nalezená j-tou částicí, g_i je globálně nejlepší nalezená pozice, $x_{ji}(t)$ je pozice j-té částice v iteraci *t*.

Pozici j-té částice zjistíme na základě součtu její předchozí pozice $\vec{x}_j(t)$ a její aktuální rychlosti $\vec{v}_j(t+1)$, tedy:

$$\vec{x}_j(t+1) = \vec{x}_j(t) + \vec{v}_j(t+1)\,. \tag{2}$$

Zjednodušeně je celý algoritmus zobrazen na Obr. 1. Po počáteční inicializaci pozic a rychlostí jednotlivých části jde o cyklus, ve kterém jsou neustále aktualizovány rychlosti a pozice jednotlivých částic na základě (1) a (2).

Obr. č. 1: Diagram procesu optimalizace pomocí PSO



4. Aplikační část

V aplikační části je řešena úloha pro minimální riziko pomocí metody nelineárního programování a pomocí algoritmu rojení částic. Výsledky získané pomocí těchto dvou metod jsou poté srovnány. Pro potřeby aplikace bylo zvoleno 13 akcií s nejvyšší váhou v indexu Dow Jones Industrial Average (DJI). Očekávaný týdenní výnos a kovarianční matice byly odhadnuty na základě historického přístupu z týdenních dat za období 7.9.1999 až 17.9.2007.[2]

[2] Data byla získána z www.finance.yahoo.com. Jedná se o data upravená o dividendový výnos a případné štěpení akcií.

Využitím metod nelineárního programování bylo nalezeno portfolio se směrodatnou odchylkou výnosu 2,172365% a očekávaným týdenním výnosem 0,0894%. Složení portfolia je zobrazeno v Tab. 1. Čas potřebný pro nalezení optimálního portfolia je menší než sekunda.

AA	2,18%	MRK	13,39%
BAC	23,16%	MSF	11,09%
CSCO	3,13%	PFE	6,35%
DIS	4,19%	T	12,95%
GE	-0,27%	WMT	8,92%
INT	0,64%	XOM	27,64%
JPM	-13,38%		

Tab. č. 1: Optimální portfolio získané pomocí nelineárního programování

Stejná úloha byla řešena i aplikací algoritmu rojení částic. Celý princip algoritmu je zobrazen na Obr. 1, změna rychlosti částic probíhá na základě (1) a změna pozice částic na základě (2). Parametr C_1 a C_2 byl zvolen dle obdobných studií ve výši 2. Jako setrvačná funkce $w(t)$ byla použita lineární klesající funkce s oborem hodnot od 0,95 do 0,4. Počet částic byl zvolen ve výši 100, neboť při tomto počtu algoritmus pracuje na osobním počítači ještě velmi svižně a zároveň pro vyšší počet částic již nedochází k významnému snížení potřebného počtu iterací. Maximální počet iterací, po kterých algoritmus ukončí hledání je ve výši 500.

Algoritmus rojení částic byl spuštěn s výše uvedenými parametry, čas potřebný pro proběhnutí všech 500 iterací se na běžném osobním počítači pohyboval kolem patnácti sekund. Částice se pohybují v dvanáctirozměrném prostoru, proto nelze pozici jednotlivých částic během průběhu algoritmu graficky zobrazit. Nalezené portfolio je charakterizováno směrodatnou odchylkou výnosu 2,172356% a očekávaným týdenním výnosem 0,0894%. Váhy jednotlivých akcií v portfoliu jsou zachyceny v Tab. 3. Směrodatná odchylka portfolia je dokonce nižší než při použití nelineárního programování, což je vysvětlitelné použitím různého SW při řešení problému oběma přístupy a jejich přesností v desetinných místech.[3]

AA	2,19%	MRK	13,4%
BAC	23,18%	MSF	11,08%
CSCO	3,13%	PFE	6,34%
DIS	4,19%	T	12,95%
GE	-0,26%	WMT	8,93%
INT	0,64%	XOM	27,63%
JPM	-13,4%		

Tab. č. 3: Optimální portfolio získané pomocí PSO

5. Závěr

V příspěvku byla řešena problematika optimalizace portfolia. V rámci Markowitzova mean-variance modelu bylo pomocí algoritmu rojení částic hledáno portfolio s minimálním

[3] Pro nelineární programování byl použit MS Excel, pro algoritmus PSO bylo využito programu MATLAB.

rizikem. Výsledky tohoto algoritmu byly srovnány s výsledky získanými tradičními metodami nelineárního programování, neboť definovaný problém je pomocí nich snadno řešitelný.

Výsledky aplikační části ukázaly, že pomocí obou přístupů bylo nalezeno shodné optimální portfolio. Nepatrný rozdíl ve výši vah a účelové funkce je vysvětlitelný použitím různého softwaru při implementaci obou přístupů. Z hlediska časové složitosti je nelineární programování mnohem rychlejší, a proto při aplikaci na jednoduché problémy i vhodnější. Výhodou algoritmu rojení částic je jeho použitelnost při řešení složitějších problémů, které nelze řešit metodami nelineárního programování.

Literatura

[1] Markowitz, H.M., *Portfolio selection.* Journal of Finance, 1952. 7(1): p. 77-91.

[2] Konno, H. and H. Yamazaki, *Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock market.* Management Science, 1991. 37(5): p. 519-531.

[3] Chang, T.J., et al., *Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation.* Computers and Operations Research, 2000. 27(13): p. 1271-1302.

[4] Kennedy, J. and R.C. Eberhart, *Particle swarm optimization [A].* Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks[C], 1995.

[5] Cura, T., *Particle swarm optimization approach to portfolio optimization.* Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009. 10(4): p. 2396-2406.

[6] Zmeškal, Z., *Finanční modely*. 2002, Ostrava: VŠB-TUO, Ekonomická fakulta.

Summary

Utilization of PSO algorithm in search for minimal risk portfolio

In recent years we can observe increasingly boosting models inspired by nature. One of these models is particle swarm optimization algorithm, which has showed very good results in determining parameters of neural networks. The paper is focused on potentiality of PSO algorithm utilization in determination of optimal portfolio. At first portfolio optimizations problem is briefly characterized, then particle swarm algorithm is generally described. In application part of the paper the algorithm is utilized to determine minimal risk portfolio. The results are compared to standard methods of non-linear programming.