Lineární diskriminační analýza a Lévyho procesy při určování pravděpodobnosti úpadku finančních institucí

Petr Gurný, Martin Gurný[1]

Abstrakt

Určování pravděpodobnosti úpadku finančních subjektů patří k jednomu z klíčových problémů ve světě moderních financí, zejména v době současné ekonomické krize. V tomto článku bude diskutována možnost určení pravděpodobnosti úpadku finančních institucí na základě jednoho z credit-scoring modelů, konkrétně lineární diskriminační analýzy. Hlavní část příspěvku je věnována nalezení modelu výpočtu pravděpodobnosti úpadku, k čemuž bude použito portfolio 36 amerických komerčních bank. Cílem článku pak je určit na základě tohoto modelu rozdělení pravděpodobnosti úpadku tří českých komerčních bank s čtvrtletní predikcí, přičemž k simulování jednotlivých finančních ukazatelů bude použit Variance Gamma proces a k zachycení závislostí mezi těmito ukazateli Gaussova copula funkce. V příspěvku budou rovněž diskutována omezení modelu a možnosti jejich odstranění. Ze závěrů je patrné, že všechny analyzované české banky jsou relativně finančně zdravé, což může být způsobeno dobrou regulací finančního trhu v České republice.

Klíčová slova

Lineární diskriminační analýza, bankovní finanční ukazatele, Lévyho procesy, copula funkce.

1. Úvod

Určování pravděpodobnosti úpadku finančních subjektů představuje klíčový prvek moderních finančních trhů. Žádná z významných oblastí řízení kreditního rizika se neobejde bez správného určení pravděpodobnosti úpadku potenciálního dlužníka. Ať už jde o určování ratingu finančního subjektu, posouzení bonity při žádostech o půjčky nebo oceňování kreditních derivátů, nesprávné určení pravděpodobnosti defaultu může mít vážné důsledky na finanční zdraví věřitelů. Zejména poslední uvedený bod, oceňování kreditních derivátů, hrál jednu ze zásadních a klíčových rolí při vzniku současné globální ekonomické krize. Podcenění a špatné ocenění rizika mělo za následek kolaps finančního systému, který se právě přes kreditní deriváty rozšířil na většinu finančních trhů.

Pravděpodobnost úpadku neboli defaultu[2] (PD) je rovněž zásadní parametr používaný ke kalkulaci ekonomického a regulatorního kapitálu pro finanční instituce dle dohody Basel II. Tato dohoda zdůrazňuje roli citlivosti na riziko pro kapitál komerčních bank. Obecně pak doporučuje dvě metody pro určení kapitálového požadavku. Zatímco tzv. standardizovaný přístup je založen na externím kreditním ratingu, IRB přístup dovoluje bankám určit kapitálový požadavek dle regulátorem schválených vnitřních modelů a postupů, jež závisí právě na správném určení pravděpodobnosti defaultu dlužníka.

---

[1] Ing. Petr Gurný, VŠB – Technická univerzita Ostrava, Ekonomická fakulta, katedra Financí, Sokolská 33, 701 21 Ostrava 1, e-mail: petr.gurny.ekf@vsb.cz.
Tento příspěvek vznikl v rámci projektu GAČR 402/08/1237.
[2] Přestože v literatuře je tomu občas jinak, budeme v tomto příspěvku pojmy úpadek, default a bankrot považovat za synonyma.

Z výše uvedeného je zřejmé, že určování pravděpodobnosti úpadku finančních subjektů je už nějakou dobu vysoce aktuální finančním problémem. Mezi jedny z nejvíce používaných modelů k předpovídání úpadku dlužníků patří třída statistických modelů, obecně známá jako credit-scoring modely. To jsou obecně víceproměnné modely, které k určování pravděpodobnosti úpadku využívají hlavní finanční ukazatele, ke kterým přiřazují podle určitých pravidel váhy tak, aby reflektovaly jejich relativní významnost při predikci. Tento příspěvek souvisí s řadou studií zaměřených právě na credit-scoring modely, konkrétně na lineární diskriminační analýzu. Přestože techniky na nichž jsou credit-scoring modely založené byly představeny již ve třicátých letech minulého století autory jako jsou Fischer (1936) a Durand (1941), ve finanční literatuře se určování pravděpodobnosti bankrotu stalo důležitým tématem až po uvedení prácí Beavra (1966) a Altmana (1968), kteří jako první srovnáním vzorků defaultních a nedefaultních společností ukázali, že úpadek společnosti může být predikován pomocí informací obsažených ve finančních ukazatelích. Dalšími významnými prácemi v této oblasti pak jsou: McFadden (1976), Altman, Haldeman, and Narayanan (1977), Santomero and Visno (1977), Ohlson (1980), Zmijeski (1984), Lo (1986), Queen and Roll (1987) a Shumway (2001).

Zatímco cílem Altmanova modelu je predikovat pravděpodobnost úpadku zejména nefinančních institucí, cílem této práce je pomocí lineární diskriminační analýzy vytvořit model pravděpodobnosti úpadku pro komerční banky na základě vzorku 36 amerických bank, a následně tento model aplikovat na tři české komerční banky s cílem určit jejich rozložení pravděpodobnosti defaultu s čtvrtletní predikcí. Obecně se předpokládá, že bankovní trh v České republice je lépe regulovaný a tedy stabilnější než americký. Tuto teorii se pokusíme na analyzovaných bankách potvrdit nebo vyvrátit.

K určení čtvrtletní predikce je třeba namodelovat jednotlivé finanční ukazatele. Zatímco až do nedávné doby byl nejvíce využívaným modelem pro popis vývoje ceny aktiv geometrický Brownův pohyb založený na předpokladu normálního pravděpodobnostního rozdělení výnosů, s globalizací a vývojem finančních trhů vyvstala nutnost modelovat i vyšší momenty pravděpodobnostního rozdělení. Mezi přístupy, který toto umožňují, patří zejména modely z obecné skupiny Lévyho procesů, blíže např. Cont and Tankov (2004) nebo Schoutens (2003). V tomto článku pak budeme jednotlivé finanční ukazatele modelovat právě pomocí jednoho z Lévyho procesů, konkrétně k modelování využijeme Variance Gamma proces. Nezbytnou složkou při modelování jednotlivých ukazatelů je také zachycení vzájemné závislosti, a to nejen mezi ukazateli jedné banky, ale i v rámci analyzovaného portfolia bank (což je důležité zejména z regulatorního hlediska). K zachycení závislostí bude použit poměrně nový přístup copula funkcí, blíže viz Nelsen (1999), konkrétně bude použita Gaussova copule.

V úvodních kapitolách článku jsou prezentována základní východiska lineární diskriminační analýzy, jsou stručně představeny Lévyho procesy se zaměřením na Variance Gamma proces a je podán potřebný nástin copula funkcí. Hlavní část práce je poté zaměřena na aplikaci výše představených teoreticko-metodologických východisek na portfolio tří českých komerční bank.

2. Lineární diskriminační analýza

Diskriminační analýza je klasifikační technika, jejímž účelem je přiřadit jednotlivé vybrané objekty z určitého vzorku do jedné nebo více skupin na základě jejich charakteristických vlastností. Obecným cílem je pak nalézt a analyticky vyjádřit takovou hranici (diskriminační funkci), která by co nejvíce rozlišovala mezi jednotlivými skupinami.

Aplikaci diskriminační analýzy potom můžeme rozdělit do čtyřech obecných kroků. V prvním kroku určujeme základní objekty, na kterých budeme diskriminační analýzu provádět. Těmito objekty může být de facto cokoliv, dle cíle tohoto příspěvku to ale budou komerční banky. Druhým krokem je přiřazení jednotlivých objektů k vybraným skupinám. Tyto skupiny jsou vlastně nezávislé proměnné a musejí být přesně definovány před samotnou aplikací diskriminační analýzy. Při aplikaci diskriminační analýzy na portfolio komerčních bank budou v tomto příspěvku nezávislými proměnnými dvě skupiny, do kterých budeme postupně přiřazovat banky zdravé a banky defaultní. Třetím krokem je určení charakteristických rysů společných pro všechny objekty, tzv. nezávislých proměnných, tak, aby co nejlépe určovaly prvky (objekty) v dané skupině. V této práci budeme za charakteristické znaky určující příslušnost bank do jedné z výše uvedených skupin považovat obecně známé bankovní ukazatele finanční analýzy, blíže např. viz Karminsky and Peresetsky (2007). Čtvrtým a posledním krokem je pak, jak už bylo řečeno výše, najít a analyticky vyjádřit takovou funkci, která by co nejlépe obě skupiny oddělovala. Pokud předpokládáme, že obě skupiny jsou lineárně separovatelné, použijeme lineárně diskriminační analýzu, pomocí které vyjádříme diskriminační funkci jako lineární kombinaci jednotlivých charakteristických rysů. Pokud tedy budou rysy dva, bude diskriminační funkcí přímka, pokud budou tři, bude jí rovina, pokud více než tři, bude mezi jednotlivými subjekty rozlišovat nadrovina. Tato diskriminační funkce nám poté určí tzv. z-score. Obecně pro i-tou společnost a n nezávislých proměnných, z-score spočítáme jako:

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_{i,j} \ , \tag{1}$$

kde vektor γ_j je vybírán tak, abychom získali score rozlišující mezi zdravými a defaultními bankami a $x_{i,j}$ je j-tá charakteristická vlastnost i-té společnosti. Hodnota z pak musí být určena tak, aby byl maximalizován rozdíl mezi středními hodnotami z_A a z_B (centroidy) obou skupin. Vektor koeficientů gamma pak může být určen takto, bližší odvození viz např. Resti a Sironi (2007):

$$\gamma = \Sigma^{-1}(x_A - x_B)\,, \tag{2}$$

kde x_A a x_B jsou vektory středních hodnot n nezávislých proměnných pro obě skupiny objektů a Σ je kovarianční matice mezi nezávislými proměnnými. Tato matice může být určena jako vážený průměr kovariančních matic jednotlivých skupin, přičemž váhy se určí jako počet jednotlivých společností (n_A, n_B) v každé skupině:

$$\Sigma = \frac{n_A - 1}{n_A + n_B - 2}\Sigma_A + \frac{n_B - 1}{n_A + n_B - 2}\,.$$

Zcela zásadním úkolem při určování modelu je správná identifikace a výběr nezávislých proměnných. Toto může být obecně provedeno třemi různými způsoby. První způsob je takzvaná přímá metoda (a priori), která je založena na teoretickém expertním zdůvodnění relativní významnosti jednotlivých ukazatelů. Jinými slovy jsou ukazatele vybírány a přidávány postupně. Druhá metoda je postupná a je založena na postupném odebírání jednotlivých ukazatelů z původní rozsáhlé škály dle jejich relativní diskriminační síly. Třetí metoda (jež je použita v aplikační části této práce) pak kombinuje dvě předcházející.

Po určení modelu je nutné identifikovat tzv. hraniční bod α, který nám umožňuje rozlišit, které společnosti na základě z-score patří do skupiny bankrotních a naopak. Můžeme ho určit jako polovinu vzdálenosti mezi oběma výše definovanými centroidy, tedy jako:

$$\alpha = \frac{1}{2}\gamma'(x_A - x_B)\,. \tag{3}$$

Lineární diskriminační analýza může být použita k přímému určení pravděpodobnosti úpadku. Lze ukázat, viz Altman (1981), že pravděpodobnost úpadku dané společnosti lze spočítat jako:

$$PD = p(B|x_i) = \frac{1}{1 + \frac{1-\pi_B}{\pi_B} e^{z_i - \alpha}}, \tag{4}$$

kde z_i a α byly definovány výše v (1) a (3) a π_B reprezentuje dřívější pravděpodobnost úpadku, která závisí na obecné charakteristice trhu.[3] Pomocí ní lze rovněž vyjádřit náladu trhu a udělat tak výpočet optimističtějším nebo pesimističtějším, případně upravit výpočet dle fáze ekonomického či kreditního cyklu.

Na závěr je nezbytné určit úspěšnost sestaveného modelu. Jedním ze široce používaných indexu k určení úspěšnosti modelu je tzv. Wilksovo lambda:

$$\Lambda = \frac{\sum_{i\in A}(z_i - z_A)^2 + \sum_{i\in B}(z_i - z_B)^2}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}, \tag{5}$$

kde $\bar{z}$ reprezentuje střední hodnotu všech z_i ve vzorku vybraných objektů. Je zřejmé, že pokud si jsou score jednotlivých společností v dané skupině navzájem velmi podobné, bude čitatel blízký nule (stejně tak jako celé Wilksovo lambda) a model bude velmi efektivní. Jestliže ale bude model neefektivní a oba centroidy budou blízko u sebe, bude suma odchylek v rámci skupin blízká celkové odchylce a model se bude blížit jedné. Vzhledem k tomu, že se Wilksovo lambda pohybuje v intervalu od nuly do jedné, je rovněž snadné vyjádřit úspěšnost modelu v procentech, což jednoduše spočítáme jako $1-\Lambda$.

3. Lévyho procesy

Lévyho proces $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ můžeme obecně definovat jako cádlág stochastický proces, jež je stochasticky spojitý a má stacionární nezávislé přírůstky, s $X(0)=0$.[4] Důležitým rysem Lévyho procesů je pak jejich nekonečná dělitelnost, viz. Sato (1999). Říkáme, že pravděpodobnostní rozložení je nekonečně dělitelné, pokud k jakémukoliv celému číslu $n \geq 1$ existuje nezávisle identicky rozložená (iid) náhodná veličina $Y_1,...,Y_n$ taková, že $Y_1 + ... + Y_n$ je opět nekonečně dělitelné rozložení. Jinými slovy, pokud je $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ Lévyho proces, pak každá hodnota $X(t)$ je nekonečně dělitelná a naopak. Z toho lze pak odvodit, že Lévyho proces $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ má jedinečný tzv. charakteristický exponent ve formě spojité funkce $\psi : R \to R$ takové, že

$$E\left\{e^{iuX(t)}\right\} = e^{t\psi(u)} \quad \text{pro} \quad u \in R \text{ a } t \geq 0,$$

kde $\psi(u)$ je kumulant charakteristické funkce, $\psi(u) = \log\phi(u)$, který vyhovuje následující Lévy-Khintchine formuli,

$$\psi(u) = i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{-\infty}^{+\infty}(\exp(iux) - 1 - iux1_{\{|x|<1\}})\upsilon(dx),$$

kde $\gamma \in R$, $\sigma^2 \geq 0$ a $\upsilon \in R \setminus \{0\}$.

3.1 Variance Gamma proces

V tomto článku budeme Variance Gamma proces definovat na základě tzv. podřízených exponenciálních Lévyho modelů, tedy modelů, kde se Lévyho proces $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ objevuje v exponentu:

[3] Vzhledem k nedostatku informací použijeme v aplikační části proporci zbankrotovaných bank v uvažovaném vzorku vzhledem k solventním.
[4] cádlág proces – funkce zprava spojitá s limitou zleva

$$S(t) = S(0)e^{X(t)} \quad \text{pro} \quad t \geq 0 .$$

Variance Gamma proces (VG) je Lévyho proces $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ jehož přírůstky se vyvíjí dle Gamma rozložení. Tedy $X(t)$ má $VG(g(t;\upsilon);\theta;\sigma)$ rozložení s parametry $\upsilon > 0$, $\sigma > 0$ a $\theta \in$ R a charakteristická funkce je dána jako

$$\phi_{VG}(u;\upsilon,\theta,\sigma) = (1 - iu\theta\upsilon + \frac{1}{2}\sigma^2\upsilon u^2)^{-1/\upsilon} .$$

Přičemž parametr θ představuje drift procesu (*mean*) a primárně řídí šikmost (*skewness*), podobně ν primárně řídí špičatost (*kurtosis*) procesu a σ určuje volatilitu.
Následující Tab. 1 v první části udává základní charakteristiky VG rozložení pro $\theta \in R$, $\sigma > 0$, $\nu > 0$. Ve druhé části je pak ukázáno, jak se parametry změní, pokud připustíme, že je rozložení symetrické, tudíž, že $\theta = 0$. Uvedené charakteristiky nám v praktické části poslouží pří aplikaci obecné metody momentů k určení parametrů VG rozložení.

	$VG\{\theta,\sigma,\nu\}$	$VG\{0,\sigma,\nu\}$
mean	θ	0
variance	$\sigma^2 + \nu \cdot \theta^2$	σ^2
skewness	$\frac{\theta \cdot \nu \cdot (3 \cdot \sigma^2 + 2 \cdot \nu \cdot \theta^2)}{(\sigma^2 + \nu \cdot \theta^2)^{3/2}}$	0
kurtosis	$3 \cdot \left(1 + 2 \cdot \nu - \frac{\nu \cdot \sigma^4}{(\sigma^2 + \nu \cdot \theta^2)^2}\right)$	$3 \cdot (1 + \nu)$

Tab.č.1: Charakteristiky momentů VG procesu

Podřízený exponenciální VG proces pak definujeme jako geometrický Brownův pohyb, který není řízený časem, ale Gama procesem. Brownův pohyb se střední hodnotou μ a standardní odchylkou σ, jenž je řízen časem t, je označen jako

$$\tilde{w}(t) \in N(\mu;\sigma^2), \tag{6}$$

kde $N(\mu;\sigma^2)$ představuje normální rozložení. Podobně se pak označí také Gamma proces, jenž je opět řízen časem t, ale jenž je nezávislý na $\tilde{w}(t)$:

$$\tilde{g}(t) \in G\left[\frac{t}{\nu};\nu\right], \tag{7}$$

kde $G\left[\frac{t}{\nu};\nu\right]$ označuje Gamma rozložení. Spojením (6) a (7) pak lze náhodnou složku VG procesu $VG(t)$ s parametry $\{\theta,\sigma,\nu\}$, jenž je reprezentován Brownovým pohybem $\tilde{w}_{g(t)}$ řízeným Gama procesem $\tilde{g}(t)$, definovat takto:

$$\tilde{w}_{g(t)} \in N[\theta \cdot g(t);\sigma^2 \cdot g(t)].$$

Lze tedy říci, že klasický čas je nahrazen určitým umělým gama časem. Proto

$$VG(t) = w_{g(t)}.$$

Potom lze VG proces $VG(t)$ zachytit takto:

$$VG(t) = \theta \cdot g(t) + \sigma \cdot \sqrt{g(t)} \cdot \tilde{\varepsilon}, \tag{8}$$

kde $\tilde{\varepsilon} \in N[0;1]$, $g(t)$ je gama proces s parametry $G\left[\frac{t}{\nu};\nu\right]$ a t je skutečný čas. Z (8) je jasné, že k simulování náhodného vývoje je zapotřebí vygenerovat dvourozměrný vektor náhodných čísel , $\{\tilde{\bar{g}};\tilde{\bar{\varepsilon}}\}$, kde $\left\{\tilde{g} \in G\left[\frac{t}{\nu};\nu\right];\tilde{\varepsilon} \in N[0;1]\right\}$, přičemž vzájemná korelace obou náhodných složek musí být nulová, $\rho\{\tilde{g};\tilde{\varepsilon}\} = 0$.

Model vývoje ceny finančního aktiva v rizikově neutrálním prostředí pak lze definovat jako

$$S_T = S_t \cdot \exp(\mu \cdot dt + VG(t) - \omega \cdot dt), \tag{9}$$

kde μ je konstantní hodnota průměrného výnosu (počítána z historických cen), $VG(t)$ je VG proces a $\omega = -\frac{1}{\nu} \cdot \ln(1 - \theta \cdot \nu - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \nu)$.

4. Copula funkce

Nejprve definujme n-rozměrnou copuli jako spojitou distribuční funkci n vektorů z náhodných prvků z rovnoměrného rozdělení, $N(0;1)$. Pokud označíme náhodné proměnné jako $U_1, U_2, ..., U_n$, můžeme copuli C zapsat jako

$$C(u_1, ...u_n) = \Pr(U_1 \le u_1, ..., U_n \le u_n).$$

Dále uvažujme jakékoliv spojité náhodné proměnné $X_1, ..., X_n$ s distribučními funkcemi $F_1, ..., F_n$ a spojitou distribuční funkci F. Hodnotu copule v $F_1(x_1), ..., F_n(x_n)$ pak můžeme vyjádřit jako[5]

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n)) &= \Pr(U_1 \le F_1(x_1), ..., U_n \le F_n(x_n)) \\ &= \Pr(F_1^{-1}(U_1) \le x_1, ..., F_n^{-1}(U_n) \le x_n) \\ &= \Pr(X_1 \le x_1, ..., X_n \le x_n) \\ &= F(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

Z tohoto pak vychází i známý Sklarův teorém, který říká, že pro jakoukoliv spojitou distribuční funkci F existuje copule C, která je jedinečná a která vyhovuje následující (již výše odvozené) rovnici

$$F(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n)).$$

Sklarův teorém umožňuje při analýze vícerozměrných rozdělení oddělit závislostní strukturu od marginálních rozdělení. Můžeme pak sestrojit vícerozměrné rozdělení z několika odlišných marginálních rozdělení (třeba i různých forem) a vybrané kopula funkce.

Sklarův teorém a vztah mezi distribuční funkcí a funkcí hustoty, $f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$, je možné rovněž využít při odvození vícerozměrné funkce hustoty copula funkce, $c(F_1(x_1), ..., F_n(x_n))$:

$$\begin{aligned} f(x_1, ..., x_2) &= \frac{\partial^n [C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n))]}{\partial F_1(x_1) ... \partial F_n(x_n)} \cdot \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i) \\ &= c(F_1(x_1), ..., F_n(x_n)) \cdot \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i), \end{aligned}$$

[5] Při odvozování využijeme toho, že $F_j^{-1}(u) = \inf\{x : F_j(x) \ge u\}$.

tedy

$$c(F_1(x_1),...,F_n(x_n)) = \frac{f(x_1,...,x_2)}{\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)}. \tag{10}$$

Funkce hustoty pak hraje klíčovou roli při kalibrování parametrů copula funkce pomocí metody maximální věrohodnosti.

4.1 Vícerozměrná Gaussova copule

Mějme symetrickou, pozitivně definitní matici R s $diag(R)=1$ a normované vícerozměrné normální rozložení Φ_R s korelační maticí R. Poté můžeme vícerozměrnou Gaussovu copuli definovat jako

$$C(u_1,...,u_n;R) = \Phi_R\left(\Phi^{-1}(u_1),...,\Phi^{-1}(u_n)\right),$$

kde $\Phi^{-1}(u)$ označuje inverzní funkci ke kumulované distribuční funkci normálního rozložení. Dle (10) pak můžeme odvodit také funkci hustoty vícerozměrné Gaussovy copule:

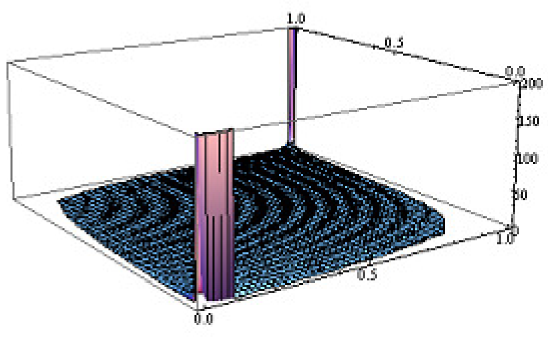
$$c\left(\Phi(x_1),...,\Phi(x_n)\right) = \frac{f^{gauss}(x_1,...,x_n)}{\prod_{i=1}^{n} f_i^{gauss}(x_i)} = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|R|^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{1}{2}\mathrm{x}'R^{-1}\mathrm{x})}{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}x_i^2)},$$

a odtud, když nahradíme $u_i = \Phi(x_i)$ a vektor gaussových jednorozměrných inverzních distribučních funkcí označíme $\varsigma = \left(\Phi^{-1}(u_1),...,\Phi^{-1}(u_n)\right)'$, dostaneme

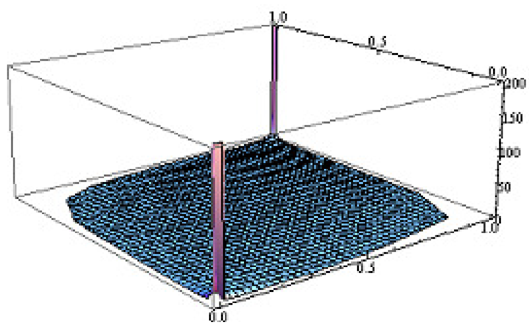
$$c(u_1,...,u_n;R) = \frac{1}{|R|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\varsigma'(R^{-1}-I)\varsigma\right]. \tag{11}$$

Obrázek 1 a 2 ukazuje graf funkce hustoty Gaussovy copule dle (11) pro dvourozměrný případ a pro korelaci r = 0,8 respektive r = 0,1.

Obr.č. 1: Funkce hustoty Gaussovy copule, r = 0,8



Obr.č. 2: Funkce hustoty Gaussovy copule, r = 0,1



5. Aplikační část

V této části příspěvku budeme výše představená teoreticko-metodologická východiska aplikovat na portfolio tří českých komerčních bank (ČSOB a. s., KB a. s., GE Money bank a. s.) s cílem určit jejich rozložení pravděpodobnosti úpadku. Nejprve bude na základě údajů z amerického trhu finančních institucí odvozena diskriminační funkce. Poté budou potřebné finanční ukazatele pro portfolio uvedených českých bank modelovány pomocí Variance

Gamma procesu, přičemž závislost jak mezi jednotlivými ukazateli, tak mezi bankami, bude zachycena pomocí Gaussovy copule.

5.1 Popis dat

Při určování diskriminační funkce budeme v tomto příspěvku pracovat se vzorkem 36 amerických komerčních bank. Jako první krok je nutné rozdělit tento vzorek do dvou skupin. Jedna skupina bude obsahovat banky, které v daném období zbankrotovaly, druhá pak banky zdravé. Již tento první krok není jednoznačný, protože je nutné subjektivní hodnocení toho, která banka je defaultní a která ne. V tomto příspěvku jsme bankrotní banky vybírali dle veřejně dostupných údajů americké centrální banky a National unclaimed property associates.[6] Patří sem banky jež vstoupily do likvidace nebo podstoupily finanční restrukturalizaci (tzn. byly přejaty vládou nebo jinou institucí). Vzorek bank pro obě skupiny byl vybírán náhodně na základě veřejně dostupných informací. Jako druhý krok je nezbytné určit finanční ukazatele, které dané banky co nejlépe vystihují, viz. Karminsky and Peresetsky (2007). Tabulka 2 a 3 ukazuje vybrané finanční ukazatele pro obě skupiny institucí včetně jejich středních hodnot.[7]

	x_1: YAEA	x_2: CIBL	x_3: NIM	x_4: ROAA	x_5: ROAE	x_6: IE II	x_7: CIR	x_8: PE OI	x_9: PL GL	x_{10}: LLR GL	x_{11}: PL EQ LLR	x_{12}: T1	x_{13}: EQ TA	x_{14}: CAR	x_{15}: D EQ
Bank of America Corporation	7,16%	4,32%	3,32%	2,07%	14,25%	60,56%	75,41%	15,73%	3,81%	1,32%	14,80%	6,87%	8,56%	11,02%	5,485
JPMorgan Chase & Co.	10,31%	4,28%	3,81%	1,48%	18,51%	63,01%	74,50%	19,50%	7,03%	1,78%	7,97%	8,40%	7,89%	12,57%	6,011
M&T Bank Corporation	6,19%	3,53%	3,91%	2,01%	14,87%	47,81%	74,21%	20,28%	6,30%	1,57%	23,64%	6,84%	10,00%	11,18%	6,363
National City Corporation	6,03%	4,16%	3,84%	1,21%	2,77%	52,14%	85,61%	21,88%	4,91%	1,52%	19,17%	6,53%	8,92%	10,27%	7,276
PNC Bank	7,78%	3,45%	4,15%	1,76%	14,10%	52,72%	75,80%	21,49%	3,98%	1,21%	43,72%	6,80%	10,69%	10,30%	5,567
SunTrust Bank	7,20%	4,03%	3,86%	1,21%	12,46%	52,97%	78,35%	20,57%	2,01%	1,05%	12,74%	6,93%	10,05%	10,30%	6,528
Wells Fargo & Company	7,27%	3,88%	5,04%	1,10%	24,41%	40,38%	69,09%	24,94%	6,94%	1,39%	14,72%	7,59%	8,28%	10,68%	7,232
Zionsbancorporation	7,99%	3,56%	4,69%	0,93%	13,92%	41,28%	75,42%	22,12%	2,52%	1,17%	10,95%	7,57%	10,00%	11,68%	6,976
State Street Corporation	10,07%	3,32%	3,84%	1,04%	11,16%	66,81%	73,18%	24,03%	5,40%	0,11%	10,00%	11,22%	7,93%	12,70%	8,478
Bank of NY Mellon Corporation	7,03%	3,12%	3,61%	1,63%	6,93%	60,01%	78,25%	27,87%	1,91%	0,64%	16,90%	9,32%	14,88%	13,25%	4,017
US Bancorp	4,74%	4,35%	3,43%	2,81%	20,55%	49,08%	65,54%	15,43%	5,25%	1,34%	17,01%	8,25%	8,86%	12,19%	6,246
Regions Bank	7,18%	3,03%	3,91%	1,45%	7,03%	45,52%	76,26%	22,61%	1,44%	1,39%	26,49%	7,29%	14,05%	11,25%	4,781
Capital One Financial Corporation	9,15%	4,16%	5,39%	2,57%	6,46%	41,05%	65,99%	13,55%	2,74%	2,91%	10,24%	9,49%	16,13%	12,29%	3,416
KeyCorp	7,09%	4,14%	3,48%	1,24%	11,86%	50,94%	77,77%	20,59%	1,98%	1,69%	13,34%	7,44%	7,89%	11,38%	8,146
Marshall & Isley Corp	7,81%	4,49%	3,00%	2,19%	7,07%	55,96%	76,58%	15,01%	5,99%	1,07%	24,48%	10,22%	11,75%	14,07%	5,004
Colonial BancGroup	6,23%	4,48%	3,54%	2,13%	7,96%	51,09%	77,78%	16,02%	2,07%	1,50%	10,58%	8,22%	8,75%	11,01%	8,155
Northern Trust Corporation	6,13%	4,01%	3,42%	1,17%	16,12%	69,39%	80,00%	23,60%	4,82%	2,21%	8,10%	9,70%	6,67%	11,90%	11,358
Webster Financial Corporation	6,58%	3,18%	3,36%	2,92%	5,58%	48,90%	81,05%	20,45%	2,45%	1,51%	19,40%	8,80%	10,10%	11,40%	7,112
mean values:	**7,33%**	**3,86%**	**3,87%**	**1,72%**	**12,00%**	**52,76%**	**75,60%**	**20,32%**	**3,98%**	**1,41%**	**16,90%**	**8,19%**	**10,08%**	**11,64%**	**6,564**

Tab.č.2: Finanční ukazatelé zdravých bank

	x_1: YAEA	x_2: CIBL	x_3: NIM	x_4: ROAA	x_5: ROAE	x_6: IE II	x_7: CIR	x_8: PE OI	x_9: PL GL	x_{10}: LLR GL	x_{11}: PL EQ LLR	x_{12}: T1	x_{13}: EQ TA	x_{14}: CAR	x_{15}: D EQ
Aliance Bank	6,03%	4,92%	4,34%	0,51%	10,85%	46,03%	78,40%	19,87%	9,54%	1,72%	147,82%	8,91%	3,54%	10,16%	22,770
Bank of Clarke County	5,94%	3,29%	3,82%	1,02%	8,66%	35,71%	77,32%	26,64%	7,29%	1,17%	9,68%	12,50%	8,87%	13,66%	8,254
BankUnited	6,02%	4,84%	2,37%	0,62%	10,02%	66,26%	84,35%	10,41%	9,53%	0,47%	22,04%	14,60%	5,40%	15,40%	8,732
Citizens Community Bank	6,26%	3,51%	3,88%	0,09%	0,80%	46,01%	93,89%	24,19%	7,05%	1,20%	22,66%	16,60%	13,72%	17,80%	6,274
Michigan Heritage Bancorp	7,49%	4,51%	3,34%	-1,41%	-10,86%	57,64%	101,24%	21,37%	20,35%	2,29%	56,08%	8,90%	8,23%	10,20%	9,519
National Bank of Commerce	6,82%	1,06%	6,56%	2,16%	30,15%	10,71%	34,71%	23,21%	14,82%	3,51%	18,55%	16,70%	11,21%	18,30%	7,320
Omni Financial Services	6,64%	4,59%	4,03%	-1,09%	12,86%	47,28%	79,36%	17,89%	11,58%	1,34%	9,88%	8,95%	10,29%	10,49%	7,529
First Bank of Idaho	3,48%	1,67%	2,19%	0,42%	3,10%	37,16%	81,29%	30,31%	9,28%	1,34%	63,27%	9,16%	8,49%	10,51%	9,604
Citizens National Bank	7,63%	4,12%	3,37%	-3,00%	-36,85%	55,85%	79,82%	13,89%	9,45%	1,74%	69,25%	3,96%	5,24%	4,96%	16,808
Silverton Bank	5,32%	2,81%	2,59%	-1,11%	-14,57%	51,25%	79,29%	23,06%	12,91%	2,02%	30,83%	8,57%	6,17%	10,85%	6,621
American Stearling Bank	10,26%	4,58%	3,77%	-5,62%	-40,79%	63,27%	452,95%	179,95%	15,77%	0,41%	23,28%	-2,31%	6,84%	-2,31%	13,419
First Priority Bank	7,41%	4,71%	2,72%	-4,29%	-67,32%	63,31%	122,85%	27,48%	19,00%	5,44%	43,74%	6,05%	5,48%	7,35%	16,091
Douglass National Bank	7,66%	4,22%	3,81%	-2,19%	-87,08%	50,26%	133,10%	38,84%	23,87%	5,33%	54,17%	3,56%	2,25%	4,85%	42,227
First National Bank	7,44%	4,10%	5,20%	1,41%	19,47%	38,40%	66,47%	9,54%	9,05%	1,49%	6,01%	9,74%	8,75%	10,99%	9,739
Hume Bank	7,78%	4,50%	3,88%	-1,48%	-9,36%	50,16%	78,24%	19,30%	8,30%	4,13%	35,00%	10,28%	14,96%	11,57%	4,855
First Heritage Bank	5,60%	9,95%	5,75%	-0,99%	12,83%	50,38%	79,00%	18,93%	13,15%	1,10%	9,31%	23,73%	15,07%	24,72%	5,492
Bank of Georgia in Commerce	6,94%	3,50%	3,87%	-3,21%	-52,43%	69,97%	125,07%	28,00%	7,01%	4,33%	41,83%	3,44%	2,68%	4,72%	34,426
Great Basin Bank of Nevada	6,86%	2,68%	4,76%	-4,35%	-41,77%	30,71%	90,88%	27,66%	11,77%	4,66%	50,79%	3,16%	2,33%	4,45%	39,236
mean values:	**6,76%**	**4,09%**	**3,90%**	**-1,25%**	**-14,02%**	**48,35%**	**107,68%**	**31,14%**	**12,21%**	**2,43%**	**39,68%**	**9,25%**	**7,75%**	**10,48%**	**14,940**

Tab.č.3: Finanční ukazatele zdefaultovaných bank

[6] www.federalreserve.gov, www.failedbankreporter.com

[7] Pro detailnější popis jednotlivých ukazatelů viz Příloha A.

5.2 Určení modelu

Postup aplikovaný pro určení modelu bude rozdělen do následujících kroků:

i. Dle (2) určíme konkrétní váhy proměnných (finančních ukazatelů) a postupně odstraníme ty s nejnižší diskriminační silou, případně se špatnou ekonomickou interpretací.
ii. Podle vah určíme diskriminační funkci a spočítáme z-score pro každou společnost.
iii. Spočítáme hraniční bod (α) a určíme pravděpodobnost úpadku dle (3) a (4).
iv. Pomocí Wilksovy lambdy, rovnice (5), určíme úspěšnost modelu.

Vektor γ (váhy finančních ukazatelů) byl dle (2) a po úpravě určen následovně:

$$\gamma = \{178 \quad 0 \quad -120 \quad 159 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -61 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

Je vidět, že z původních 15 ukazatelů nám zůstaly pouze 4 s největší diskriminační silou. Nyní vložíme tento vektor do (1) a dostaneme obecnou diskriminační funkci pro určení z-score.

$$z_i = 178x_{1,i} - 120x_{3,i} + 159x_{4,i} - 61x_{10,i} \text{ ,}$$

kde x_1 je ukazatel YAEA, x_3 NIM, x_4 ROAA a x_{10} PL GL.

Po určení modelu můžeme spočítat z-score pro každou společnost. Výsledky jsou prezentovány v tabulce 4. Po kalkulaci hraničního bodu (α), $\alpha = 3{,}28$, můžeme přímo určit pravděpodobnost úpadku pro analyzované společnosti dle (4). Výsledky jsou opět součástí tabulky 4.

non-default banks	z_i	*PD*	*default banks*	z_i	*PD*
Bank of America Corporation	9,680	0,2%	*Aliance Bank*	0,506	94,1%
JPMorgan Chase & Co.	11,794	0,0%	*Bank of Clarke County*	3,143	53,4%
M&T Bank Corporation	5,643	8,6%	*BankUnited*	3,035	56,1%
National City Corporation	5,017	15,0%	*Citizens Community Bank*	2,295	72,8%
PNC Bank	9,184	0,3%	*Michigan Heritage Bancorp*	-5,343	100,0%
SunTrust Bank	8,838	0,4%	*National Bank of Commerce*	-1,364	99,0%
Wells Fargo & Company	4,357	25,4%	*Omni Financial Services*	-1,832	99,4%
Zionsbancorporation	8,487	0,5%	*First Bank of Idaho*	-1,425	99,1%
State Street Corporation	11,623	0,0%	*Citizens National Bank*	-1,015	98,7%
Bank of NY Mellon Corporation	9,565	0,2%	*Silverton Bank*	-3,284	99,9%
US Bancorp	5,551	9,3%	*American Stearling Bank*	-4,827	100,0%
Regions Bank	9,463	0,2%	*First Priority Bank*	-8,479	100,0%
Capital One Financial Corporation	12,167	0,0%	*Douglass National Bank*	-8,982	100,0%
KeyCorp	9,174	0,3%	*First National Bank*	3,688	39,9%
Marshall & Isley Corp	10,086	0,1%	*Hume Bank*	1,749	82,2%
Colonial BancGroup	8,932	0,3%	*First Heritage Bank*	-6,544	100,0%
Northern Trust Corporation	5,690	8,2%	*Bank of Georgia in Commerce*	-1,701	99,3%
Webster Financial Corporation	10,781	0,1%	*Great Basin Bank of Nevada*	-7,593	100,0%
mean values:	***8,668***	***3,8%***	***mean valus:***	***-2,110***	***88,5%***

Tab.č.4: Z-score a PD

Jak bylo zmíněno již v teoretické části, parametr π_B byl v tomto případě určen jako poměr mezi defaultními a zdravými bankami, teda $\pi_B = 50\%$. Nižší hodnota tohoto parametru by znamenala větší optimismus na trhu a posunula by hodnoty jednotlivých pravděpodobností směrem dolů a naopak. Z výsledků tabulky 4 lze vidět, že model není úplně perfektní. Přestože výsledná diskriminační funkce poměrně dobře rozlišujeme mezi oběma skupinami bank (viz střední hodnoty 3,8% respektive 88,5%), u některých defaultních bank je vidět vyšší z-score (např. First National bank) a naopak některé zdravé banky mají relativně vyšší pravděpodobnost úpadku (např. Wells Fargo & Company). Zmíněné odchylky snižují efektivnost modelu, která byla dle Wilksovy lambda určena na 73%, což je ovšem stále nadprůměrná úspěšnost. Jaká jsou tedy omezení modelu? V prvé řadě, když k určení pravděpodobnosti úpadku používáme credit-scoring modely, je nutné mít dostatečné množství společností ve zkoumaném vzorku. Čím větší je počet pozorování, tím větší je výsledná přesnost modelu. Naneštěstí u finančních institucí není vzhledem k jejich specifikám toto množství k dispozici. Zkoumaný vzorek 36 bank sice není úplně nevyhovující, přesto má výsledný model z tohoto pohledu určitá omezení. Druhý problém je spojený (jak již bylo zmíněno výše) s definicí defaultní společnosti. Je zcela zřejmé, že rozčlenění objektů do jednotlivých skupin má zásadní vliv na podobu výsledného modelu. Toto je důležité z hlediska aplikace a zejména pak z hlediska interpretace modelu. Další problém je spojený s faktem, že credit-scoring modely ignorují kvalitativní faktory, které mohou hrát při určování insolvence zásadní roli (pověst společnosti, kvalita managementu…). Určitou možností by bylo převést tyto kvalitativní ukazatele na kvantitativní pomocí vhodné bodové škály. Zde by však do modelu opět vstupoval subjektivní prvek. V neposlední řadě pak má na úspěšnost modelu vliv také charakteristika finančních trhů.

5.3 Aplikace modelu a určení rozložení PD portfolia českých bank

Model definovaný v předcházející kapitole nyní použijeme k určení rozložení pravděpodobnosti úpadku ČSOB a. s., KB a. s. a GE Money Bank a. s., přičemž toto rozložení budeme predikovat na jedno čtvrtletí. Nejprve musíme zvolit náhodný proces, pomocí kterého budeme vstupy modelu (určené finanční ukazatele) modelovat. Jak již bylo řečeno v úvodu, za tento proces byl zvolen Variance Gamma proces, jelikož umožňuje zachytit i vyšší momenty pravděpodobnostního rozložení, konkrétně šikmost a špičatost. Pro kalibraci jednotlivých parametrů je nejprve nutné znát historickou časovou řadu jednotlivých ukazatelů. Z finančních výkazů jednotlivých společností byla spočítána desetiletá časová řada se čtvrtletními údaji, konkrétně byly získány čtvrtletní hodnoty za období let 1998 – 2008. Pomocí těchto časových řad a s využitím momentů z tabulky 1 byly nakalibrovány následující parametry (Tab. č. 5):

ČSOB:	*YAEA*	*NIM*	*ROAA*	*PL GL*
θ	0,0318911	0,000907812	0,00845446	0,0111139
σ	0,0153804	0,00494465	0,00384301	0,00451235
ν	0,195523	0,0611487	0,0688507	0,597304
GE Money Bank:	*YAEA*	*NIM*	*ROAA*	*PL GL*
θ	0,00980816	-0,0225702	0,0259055	0,0225668
σ	0,011228	0,011458	0,0104261	0,0201757
ν	0,682561	0,0759955	0,0913395	0,162865
KB:	*YAEA*	*NIM*	*ROAA*	*PL GL*
θ	0,0273713	0,0126763	0,00151634	0,0180544
σ	0,0156647	0,00706529	0,0142816	0,0457373
ν	0,446639	0,261883	0,277072	0,362312

Tab.č.5: Parametry VG procesu kalibrované pomocí obecné metody momentů

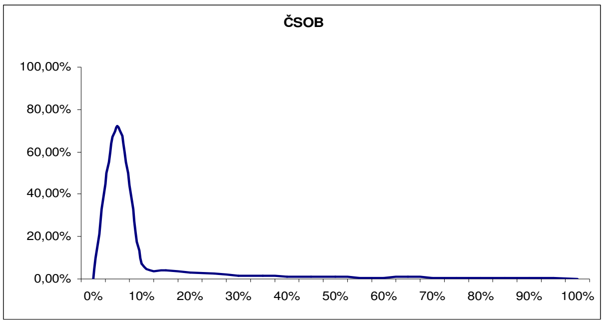
Nyní už lze z určených parametrů snadno dle (8) modelovat VG proces pro jednotlivé ukazatele a následně určit jejich vývoj dle (9). Nesmíme ovšem zapomenout, že tímto způsobem bychom nasimulovali jednotlivé marginální rozložení, která by byla na sobě navzájem nezávislá. Z empirických údajů a korelační matice, viz tabulka 6, je ale zřejmé, že určitá závislost mezi ukazateli existuje. Tuto závislost je nutné při simulování nějakým způsobem zachytit. Dle teoretické části použijeme k vyjádření této závislosti Gaussovu copula funkci, jejímž jediným parametrem je uvedená korelační matice. Výslednou copuli poté aplikujeme na jednotlivé marginální rozložení VG procesu a získáme tak čtvrtletní vývoj jednotlivých ukazatelů s danou závislostí.

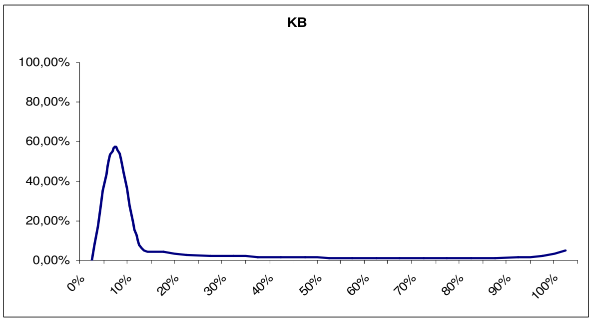
		ČSOB				KB				GE MONEY BANK			
		YAEA	NIM	ROAA	PL GL	YAEA	NIM	ROAA	PL GL	YAEA	NIM	ROAA	PL GL
ČSOB	YAEA	1,00	0,09	0,31	0,53	0,49	-0,16	-0,43	0,02	0,02	0,06	-0,28	-0,50
	NIM	0,09	1,00	0,13	0,09	0,30	0,35	0,15	0,22	0,42	0,35	0,15	0,07
	ROAA	0,31	0,13	1,00	0,27	0,15	-0,13	-0,19	-0,09	0,10	0,04	-0,23	-0,27
	PL GL	0,53	0,09	0,27	1,00	0,46	-0,15	-0,17	-0,06	0,12	-0,02	-0,04	-0,20
KB	YAEA	0,49	0,30	0,15	0,46	1,00	0,34	-0,36	0,16	0,47	0,18	-0,19	-0,48
	NIM	-0,16	0,35	-0,13	-0,15	0,34	1,00	0,44	-0,01	0,45	0,32	0,10	0,10
	ROAA	-0,43	0,15	-0,19	-0,17	-0,36	0,44	1,00	-0,19	0,13	0,18	0,34	0,55
	PL GL	0,02	0,22	-0,09	-0,06	0,16	-0,01	-0,19	1,00	0,12	0,09	-0,28	-0,18
GE MONEY BANK	YAEA	0,02	0,42	0,10	0,12	0,47	0,45	0,13	0,12	1,00	0,38	-0,06	0,09
	NIM	0,06	0,35	0,04	-0,02	0,18	0,32	0,18	0,09	0,38	1,00	0,02	0,22
	ROAA	-0,28	0,15	-0,23	-0,04	-0,19	0,10	0,34	-0,28	-0,06	0,02	1,00	0,42
	PL GL	-0,50	0,07	-0,27	-0,20	-0,48	0,10	0,55	-0,18	0,09	0,22	0,42	1,00

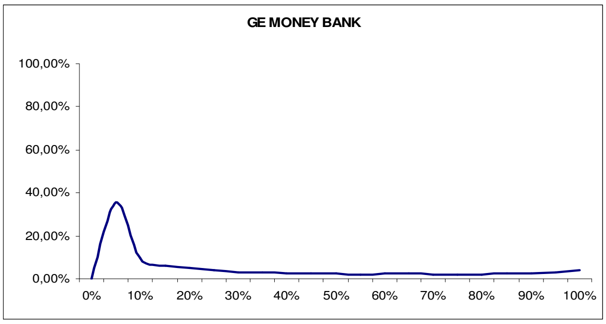
Tab.č.6: Empirické korelace mezi jednotlivými ukazateli

Poté už snadno dosazením jednotlivých nasimulovaných ukazatelů do určeného modelu získáme rozložení pravděpodobnosti defaultu u jednotlivých bank. Graficky znázorněné výsledky pak ukazuje obrázek 3.

Obr.č. 3: Pravděpodobnostní rozdělení PD







Z grafických výsledků je zřejmé, že všechny tři zkoumané banky jsou na tom z hlediska pravděpodobnosti defaultu relativně dobře. Nejstabilněji se dle vytvořeného modelu jeví ČSOB, u které s největší pravděpodobností v nejbližším čtvrtletí k defaultu nedojde. O něco hůř dopadla KB a relativně nejhůře potom GE Money Bank, což by mohlo být způsobeno její zákaznickou strukturou (orientací i na méně bonitní klientelu). Přesto všechny tři banky oproti defaultním americkým bankám vykazují finanční zdraví, což potvrzuje teorii, že je český bankovní trh oproti americkému stabilnější a lépe regulovaný. Znovu zdůrazňujeme, že výsledky jsou ovlivněny relativně vysokým předpokladem pesimismu, odrážejícím se v parametru π_B.

6. Závěr

Hlavní smysl určování pravděpodobnosti úpadku leží v jeho využití v managementu rizik, oceňování kreditních derivátů, určování bonity dlužníků a kapitálové přiměřenosti finančních institucí. Nesprávné stanovení pravděpodobnosti úpadku vede ke špatnému ocenění rizika a k tedy může vést k závažným finančním problém dané společnosti, popřípadě celého trhu, jak prokázala současná finanční krize.

Tento příspěvek byl zaměřen na možnost určení pravděpodobnosti defaultu pomocí jednoho z credit-scoring modelu, jmenovitě pomocí lineární diskriminační analýzy. Ze vzorku 36 amerických komerčních bank jsme odvodili model, pomocí něhož je možné s 63% úspěšností odhadnout riziko defaultu komerčních bank. Tento model jsme poté aplikovali na portfolio tří českých bank. Cílem bylo určit rozložení pravděpodobnosti úpadku s čtvrtletní predikcí. K tomu bylo zapotřebí modelovat jednotlivé finanční ukazatele pomocí náhodného procesu, k čemuž byl vybrán jeden z Lévyho procesů, Variance Gamma model. Obecnou výhodou Lévyho procesů je to, že umožňují oproti klasickému prostředí Blacka a Scholese modelovat také šikmost a špičatost pravděpodobnostního rozdělení podkladových faktorů. Důležitým krokem bylo také zachycení závislosti mezi jednotlivými faktory, k čemuž byla použita vícerozměrná Gaussova copule.

Z výsledných grafických výsledků můžeme konstatovat, že všechny námi uvažované české banky jsou relativně stabilní, přičemž nejlépe v daném modelu dopadla ČSOB. Při interpretaci výsledků je nutné brát v úvahu rovněž předpoklad relativně vysoké míry pesimismu, jehož redukcí by pravděpodobnosti úpadku doznaly poklesu. Právě analýza citlivosti pravděpodobnosti úpadku na parametr π_B, stejně tak jako využití dalších Lévyho procesů a copula funkcí, bude předmětem navazujícího výzkumu.

Literatura

[1] ALTMAN, E. I. Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy. *Journal of Finance*, September, 1968, 589-609.

[2] ALTMAN, E. I., HALDEMAN, R. G. and NARAYANAN, P. Zeta analysis: a new model to identify bankruptcy risk of corporations. *Journal of Banking and Finance 1*, 1977, 29–54.

[3] ALTMAN, E. I. *Application of Classification Techniques in Business, Banking and Finance*. JAI Press, Greenwich, 1981.

[4] BALTHAZAR, L. *From Basel 1 to Basel 3: The Integration of State-of-the-Art Risk Modeling in Banking Regulation*. New York: Palgrave Macmillan, 2006, 294 p.

[5] BEAVER, W. Financial ratios as predictors of failures. Empirical Research in Accounting: Selected Studies – 1966, supplement to *Journal of Accounting Research*, 4, 1967, 71-111.

[6] CONT, R., TANKOV, P. *Financial Modelling with Jump Processes*. 2nd Printing, Chapman & Hall/CRC Press, London, 2004.

[7] DURAND, B. Risk elements in consumer installments financing. Working paper, 1941, NBER.

[8] FISHER, R. The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Annals of Eugenics,* 7, 1936, 179-188.

[9] KARMINSKY, A., PERETSKY, A. Models for Moody's bank rating, *BOFIT Discussion Papers 17*, 2007.

[10] LO, A. W. Logit versus discriminant analysis: a specification test and application to corporate bankruptcy. *Journal of Econometrics 31*, 1986, 151–178.

[11] McFADDEN, D. A comment on discriminant analysis versus logit analysis. *Annals of Economic and Social Measurement*, 1976, 511–523.

[12] NELSEN, R., B. *An Introduction to Copulas*. Springer-Verlag, 1999.

[13] OHLSON, J., A. Financial ratios and the probabilistic prediction of bankruptcy. *Journal of Accounting Research 18*, 1980, 109–131.

[14] QUEEN, M., ROLL, R. Firm mortality: using market indicators to predict survival. *Financial Analysts Journal 3*, 1987, 9–26.

[15] RESTI, A., SIRONI, A. *Risk management and Shareholders' value in banking*. Chichester: Wiley, 2007, 782 p.

[16] SANTOMERO, A., VISNO, J. D. Estimating the probability of failure for commercial banks and the banking system. *Journal of Banking and Finance 1*, 1977, 185–215.

[17] SATO, K. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[18] SCHOUTENS, W. *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivates*. Wiley, 2003.

[19] SHUMWAY, T. Forecasting bankruptcy more accurately: a simple hazard rate model. *Journal of Business 74*, 2001, 101–124.

[20] TICHÝ, T. Posouzení vybraných možností zefektivnění simulace Monte Carlo při opčním oceňování. *Politická ekonomie* 56, 6, 2008, 772-794.

[21] ZMIJESKI, M. E. Methodoligal issues related to the estimation of financial mistress prediction models. *Journal of Accounting Research 22*, 1984, 59–82.

Summary

One of the most important tasks in the risk management is the correct determination of probability of default (PD) of particular financial subjects. In this paper a possibility of determination of financial institution's PD according to the linear discriminant analysis is discussed. The main part of the paper is devoted to the estimation of the score via discriminant function and to the direct determination of the probability of default associated with the individual companies analyzed. Linear discriminant analysis is applied and verified on sample of 36 financial institutions. After obtaining the fit discriminant function we apply it on the portfolio of three Czech banks to estimate their PD distribution. Variance Gamma (VG) process (one of the Lévy processes) is used to model the financial indicators. Dependence among the particular indicators and among the banks is represented by Gaussian copula. There are also discussed restrictions of introduced model and possibilities of its improvement in the paper.

Příloha A

Indicator	*Description of Indicator*	*Indicator's group*
TA	Total assets ($, mln)	*Size*
LTA	Logarithm of total assets	*Size*
EQ	Shareholders' Equity ($, mln)	*Size*
YAEA	Interest Income / Average Interest Earning Assets (%)	*Profitability*
CIBL	Interest Expense / Average Interest Bearing Liabilities (%)	*Profitability*
NIM	Net Interest Margin	*Profitability*
ROAA	Return on Average Assets (%)	*Profitability*
ROAE	Return on Average Equity (%)	*Profitability*
IE II	Interest Expense / Interest Income (%)	*Profitability*
CIR	Cost to Income Ratio (%)	*Efficiency*
PE OI	Personnel Expenses / Operating Income (%)	*Efficiency*
EQ TA	Shareholders' Equity / Total Assets (%)	*Capital adequacy*

Appendix A: Description of financial indicators