Determination of Value at Risk via Extreme Value Theory

Stanovení Value at Risk s využitím teorie extrémních hodnot

Kateřina Zelinková [1]

Abstract

Risk management is currently one of the most important activities of financial companies. The aim of the paper is determination of Value at Risk and Expected Shortfall of motor hull insurance portfolio, under assumption of traditional distribution and via the Extreme Value Theory within Solvency II, ie. that the VaR is estimated at 99, 5% confidence level and over one year risk horizon. The first part of the paper is devoted to the Value at Risk and Expected Shortfall description. Then we are described Extreme Value Theory and its version of the Peak Over Threshold. Next part of the paper deals with the application of the given methodology of VaR for a database of insurance claims. The results obtained show that the Extreme Value Theory is very important for determining the risk in comparison with traditional distribution assuming empirical data show a right fat tail of the distribution.

Key words

Value at Risk, Extreme Value Theory, Expected Shortfall, generalized Pareto distribution, Solvency II.

JEL Classification: C16, G22, G32

1 Úvod

Value at Risk je považován za základní měřítko pro kvantifikaci tržního, pojistného, nebo kreditního rizika. Také se používá pro stanovení kapitálového požadavku v bankách či v pojišťovnách. Metodologie Value at Risk je popsána v řadě knih, [1], [4], [5]. Artzner [2] charakterizoval tzv. koherentní riziko, které je definováno čtyřmi předpoklady, a to monotónnost, sub-aditivita, homogenitu a translační invarianci. Právě všechny tyto předpoklady nemá Value at Risk, a proto se používá Expected Shortfall. Cílem příspěvku je stanovit Value at Risk a Expected Shortfall za předpokladu klasického rozdělení pravděpodobnosti a také pomocí teorie extrémních hodnot v rámci Solvency II, tzn., že VaR je odhadnut pro 99,5% hladinu spolehlivosti a časový horizont jednoho roku.

V první části příspěvku je charakteristika metodologie Value at Risk a Expected Shortfall. Následně je popsána teorie extrémních hodnot a její verze Peak Over Threshold. Další část článku se zabývá aplikací metodologie Value at Risk pro databázi pojistných událostí. Nejprve je stanoveno VaR a ES pro klasické rozdělení pravděpodobnosti, tj. exponencionální, gama a Weibullovo, jejichž charakteristikou se zabývá [3]. Dále je odhadnuto VaR a ES v rámci EVT. Pomocí získaných výsledků lze konstatovat, že teorie estrémních hodnot je velmi

[1] VŠB-TU Ostrava, Ekonomická fakulta, katedra Financí, Sokolská 33, 701 21, Ostrava katerina.zelinkova.@vsb.cz. Tento příspěvek vznikl za finanční podpory Studentské grantové soutěže EkF, VŠB-TU Ostrava v rámci projektu SP2011/38 “Odhad a predikce individuállních rizik ve finančních institucích”.

důležitá pro stanovení rizika ve srovnání s klasickými rozděleními pravěpodobnosti za předpokladu, že empirická data vykazují těžký pravý konec rozdělení.

2 Value at Risk a Teorie extrémních hodnot

V následujících podkapitoálch je stručná charakteristika Value at Risk, Expected Shortfall a hlavní princip teorie extrémních hodnot.

2.1 Value at Risk

VaR je velmi rozšířené měřítko v oblasti řízení rizik. Používá se pro kvantifikaci tržního, pojistného, kreditního či operačního rizika.Výhodou tohoto kritéria je, že poskytuje jedno číslo, které shrnuje celkové riziko portfolia finančních aktiv, a proto si získal oblibu mezi manažery, zejména finančních institucí.

Ukazatel Value at Risk je definován jako nejmenší predikovaná ztráta na dané hladině pravděpodobnosti za daný časový interval. Také lze charakterizovat Value at Risk jako jednostranný interval spolehlivosti potencionálních ztrát hodnoty portfolia po danou dobu držení, což lze zapsat:

$$F(x) = P\left(X \le -VaR_{\alpha,\Delta t}(x)\right) = \alpha \tag{1}$$

kde $F(x)$ je distribuční funkce, α je hladina spolehlivosti and Δt je časový horizont.

Z (1) vyplývá, že

$$\text{-}VaR_{\alpha,\Delta t}(x) = inf\left\{x\hat{I}R : \alpha£F(x)\right\}. \tag{2}$$

2.2 Expected Shortfall

Expected Shortfall (ES) se také nazývá Conditional Value at Risk (CVaR) nebo Expected Tail Loss (ETL). Hodnota ES má lepší vypovídací schopnost než VaR, protože respektuje těžké konce rozdělení. Tato hodnota splňuje všechny čtyři podmínky pro koherentní míru rizika, které jsou:

- monotónost: $X, Y \in V, X \le Y \Rightarrow \rho(X) \ge \rho(Y)$;
- sub-additivita: $X, Y, X+Y \in V \Rightarrow \rho(X+Y) \le \rho(X) + \rho(Y)$;
- homogenita: $X \in V, h \ge 0, hX \in V \Rightarrow \rho(hX) = h\rho(X)$;
- translační invariance: $X \in V, a \in \Re \Rightarrow \rho(X+a) = \rho(x) - a$.

Expected Shortfall lze obecně vyjádřit

$$CVaR_{\alpha,\Delta t} = -\alpha^{-1} \int_{-\infty}^{VaR_{\alpha,\Delta t}} x f(x)\, dx, \tag{3}$$

kde *f (x)* je hustota rozdělení pravděpodobnosti.

2.3 Teorie extrémních hodnot

Existuje několik metod jak stanovit VaR a ES v rámci EVT. První způsob se nazývá Block Maxima (BM) a druhý způsob je označován jako Peak over Theshodl (POT), který přistupuje k identifikaci extrémních událostí pomocí definování prahové hodnoty, jejíž překročení implikuje výskyt extrémní události. Podle příslušného Picklands – Dalkema- de Hann teorému lze velmi dobře aproximovat zobecněným Paterovým rozdělením, kde daná funkce je následující

$$F_{\xi,\beta}(x)=\begin{cases}1-\left(1+\xi\dfrac{x}{\beta}\right)^{-1/\xi} & ;\xi\neq 0,\\[2ex] 1-\exp\left(-\dfrac{x}{\beta}\right) & ;\xi=0,\end{cases}\tag{4}$$

kde ξ vyjadřeje tvar rozdělení a β je scale parametr.

VaR v EVT je dán

$$VaR_{\alpha,\Delta t}=u+\frac{\beta}{\xi}\left[\left(\frac{n}{n_u}(1-\alpha)\right)^{-\xi}-1\right],\tag{5}$$

kde α je úroveň spolehlivosti, n je počet všech pozorování a n_u počet překročení nad prahovou hodnotu u . Odhad ES se počítá následovně

$$CVaR_{\alpha,\Delta t}=VaR_{\alpha,\Delta t}+\frac{\beta+\xi(VaR_{\alpha,\Delta t}-\mu)}{1-\xi}=\frac{VaR_{\alpha,\Delta t}}{1-\xi}+\frac{\beta-\xi\mu}{1-\xi}.\tag{6}$$

3 Stanovení VaR a ES

V této části jsou odhadnuty hodnoty pro Value at Risk a ES za předpokladu exponenciálního, gama a Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti a také stanovení míry rizika pomocí teorie extrémních hodnot. Všechny odhady jsou počítány v rámci Solvency II, tedy hladina spolehlivosti je ve výši 99,5 % a časový horizont je 1 rok.

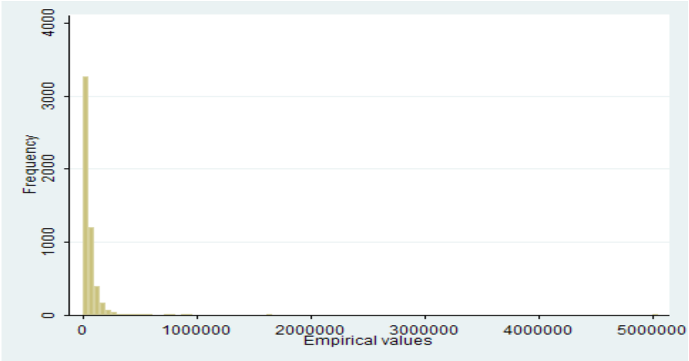
Kalkulace byla provedena na datech, které popisují nároky jednotlivých pojištěnců v rámci havarijního pojištění. Základní číselné charakteristiky, zejména střední hodnota, směrodatná odchylka, špičatost, šikmost a počet pojistných událostí uvádí následující tabulka.

Základní informace o databázi pojistných škod	
Střední hodnota	56 441 Kč
Směrodatná odchylka	96 534 Kč
Špičatost	1 403
Šikmost	29
Počet pojistných událostí za rok 2009	5 164

Tab. 1: Základní číselné charakteristiky

Pravděpodobnostní funkci získanou z empiricky napozorovaných dat zobrazuje následující graf (Obr. 1).

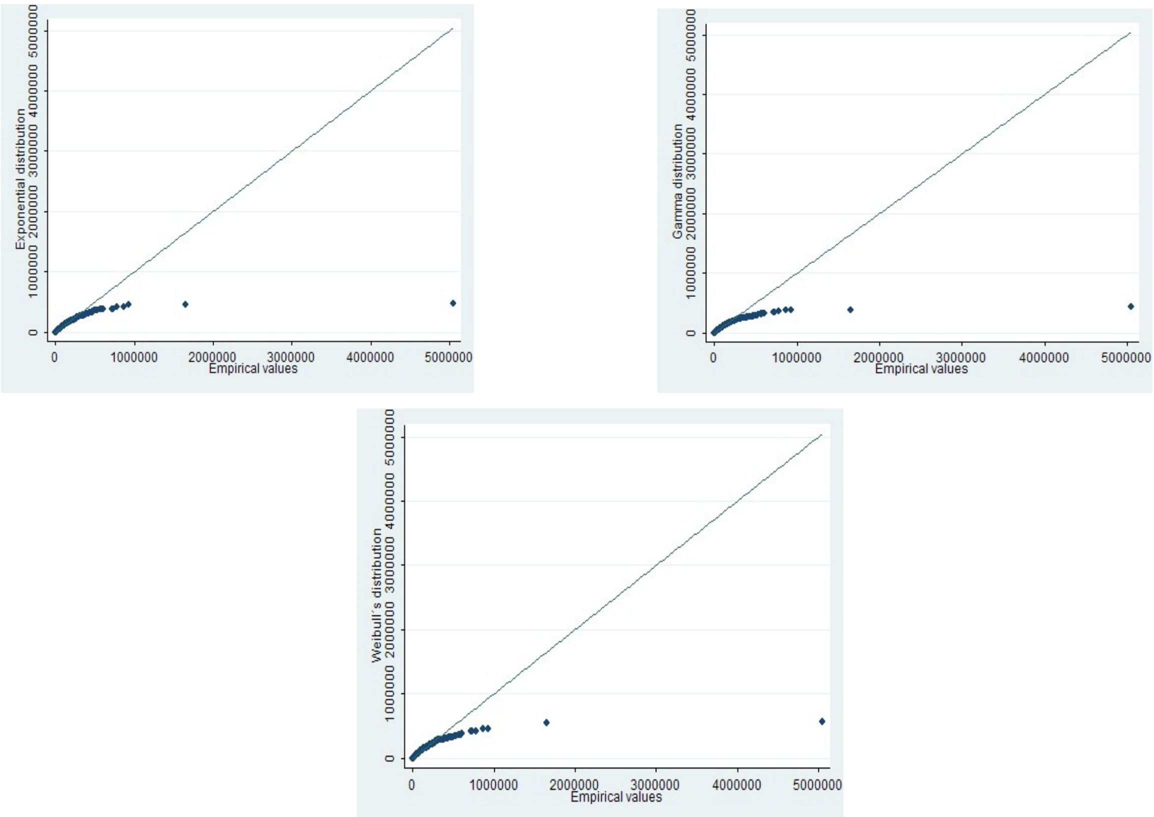
Obr. 1: Empirická pravděpodobností funkce



Z výše uvedeného grafu je zřejmé, že většina ztrát patří do intervalu 1 až 350 000 Kč. Existují i málo četné ztráty, které se pohybují kolem hodnoty 1,3 mil. Kč.

Následně se odhadnou parametry pro exponenciální, gama a Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti pomocí metody maximální věrohodnosti. Výsledky grafických testů jsou uvedeny v následujících grafech (Obr. 2)

Obr. 2: Výsledky grafických testů pomocí QQ plots



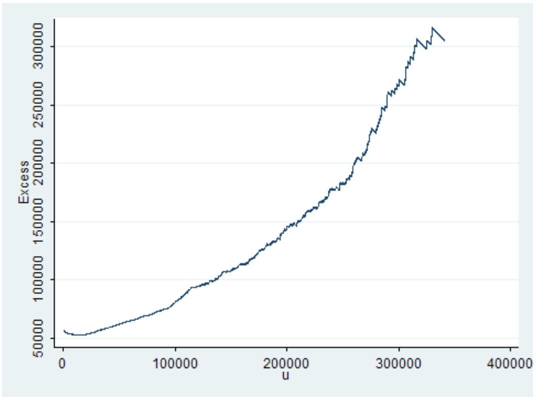
Podle provedených testů dobré shody se ukázalo, že žádné z testovaných rozdělení pravděpodobnosti nepopisuje věrohodně empiricky napozorovaná data. Nasbíraná data vykazují těžší pravý konec rozdělení oproti zkoumaným teoretickým rozdělením pravděpodobnosti. Z toho důvodu je vhodné stanovit VaR a ES pomocí EVT. Odhady parametrů rozdělení pravděpodobnosti zobrazuje následující tabulka.

Exponenciální	λ	
	56 440.971	
Gamma	α	β
	1.112	50767.864
Weibullovo	α	β
	56 234.865	0.993

Tab. 2 Odhady parametrů klasického rozdělení

Pro stanovení VaR a ES pomocí EVT je nutné stanovit prahovou hodnotu výše extrémní ztráty. Za tímto účelem byla využití metoda grafického zobrazení střední exces ztátové funkce. Je důležité, aby zvolená prahová hodnota byla dostatečně vysoká a zároveň měla lineární sklon. Z toho důvodu byla stanovená ve výši 150 000 Kč.

Obr. 3 Střední exces ztrátová funkce



Dále je nutné odhadnout parametry zobecněného Paretova rozdělení pravděpodobnosti. Pro odhad jednotlivých parametrů je opět použita metoda maximální věrohodnosti s využitím dat, jejichž výše přesáhla stanovený práh. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce 3.

zobecněné Paretovo rozdělení	**Hodnota**
ξ	0,0198
β	252 769,06
Práh výše ztráty	150 000
Počet empirických dat přesahujících stanovený práh	316

Tab. 3 Odhady parametrů zobecněného Paretova rozdělení

Nakonec je určena hodnota VaR a ES pomocí EVT a také za předpokladu klasického rozdělení pravděpodobnosti, tedy pro exponencionální, gama a Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti.

	Rozdělení pravděpodobnosti			
	Paretovo	exponencionální	gamma	Weibullovo
$VaR_{99,5\%}$	799 062	299 042,18	282 385,96	301 618,71
$ES_{99,5\%}$	918 928	355 483,15	333 936,19	344 310,37

Tab.4 Míra rizika pro různá rozdělení pravděpodobnosti

Výše kapitálu na krytí neočekávaných ztrát pro danou hladinu spolehlivosti 99,5% je 799 062 Kč, v případě VaR v rámci EVT. Lze vidět vysoký rozdíl mezi hodnotami VaR pro klasické rozdělení pravděpodobnosti a EVT. Stejný závěr je i v případě ES. To znamená, že je velmi důležité uplatňovat metodu EVT pro stanovení míry rizika.

4 Závěr

Příspěvek se zabýval odhadem Value at Risk a Expected Shortfall za předpokladu klasického rozdělení pravděpodobnosti (exponencionální, gama a Weibullovo) a také pomocí teorie extrémních hodnot. V rámci Solvency II byl VaR a ES stanoven na 99,5% hladině spolehlivost v časovém horizontu jeden rok.

Na základě získaných výsledků byly potvrzeny těžké konce v empirickém rozdělení pravděpodobnosti v uvedených datech, což se ověřilo pomocí grafických testů dobré shody QQ Plots. Také se zdůraznily výhody využití EVT. Lze konstat, že pokud se zanedbají těžké konce rozdělení, tak to vede k velmi nepřesnému odhadu Value at Risk, což má za následek nedostatečnou výši kapitálu, která by měla krýt ztrátu.

Literatura

[1] ALEXANDER, C.: 2008. *Value at Risk models.* Chichester, John Wiley& Sons Inc.

[2] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.–M., and HEATH, D.:1999.*Coherent Measures of Risk*. Mathematical Finance 9, 203–228.

[3] BEIRLANT, J., GOEGEBEUR, Y., SEGERS, J., TEUGELS, J. 2004. *Statistics of Extremes: Theory and Applications.* Chichester, John Wiley& Sons Inc.

[4] HULL, J. C. 2007. *Risk management and Financial Institutions*. New Jersey, Pearson Education.

[5] JORION, P. 2007. *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. New York, McGraw-Hill.