The Prediction of Mortality rate in the Czech Republic

Predikce míry úmrtnosti pro Českou republiku

Ingrid Petrová [1]

Abstract

In this paper we focus on life insurance risk management. The prediction of mortality rate is a significant activity of the insurance companies and the pension funds. The new directive for insurance companies Solvency II will be implemented in 2012 According to this directive the insurance companies are obliged to determine the solvency capital requirement for life insurance risks, i. e. mortality and longevity risk. The Lee-Carter model is still used for mortality risk modelling. The aim of the paper is to apply the Lee-Carter model for prediction of mortality index for males and females on the basis of mortality tables for the Czech Republic.

Key words

Mortality risk, Solvency II, Lee-Carter model.

JEL Classification: G22, G23

1. Úvod

Vzhledem ke zřejmým změnám v oblasti demografického složení obyvatelstva je pro pojišťovny potřebná znalost vývoje míry úmrtnosti vzhledem k povinnosti plnit závazky vyplývající z uzavřených smluv. V současné době jsou před deterministickými modely při předpovídání míry úmrtnosti preferovány stochastické modely. Již v 90. letech minulého století byly publikovány práce týkající se modelování úmrtnosti pomocí stochastických modelů. Mezi nejznámější a stále používaný model patří Lee-Carterův model, jenž byl poprvé publikován v roce 1992 (Lee a Carter, 1992). Lee-Carter model byl původně aplikován na americká data pro roky 1933 – 1987.

Dále byl tento model úspěšně aplikován pro dlouhodobé předpovídání míry úmrtnosti v mnoha zemích pro různá časová období, např. Kanada (Lee a Nault, 1993), Chile (Lee a Rofman, 1994) či Japonsko (Wilmoth, 1996).

Cílem příspěvku je pomocí Lee-Carterova modelu zjistit trend úmrtnosti na základě dat z úmrtnostních tabulek za období 1920 – 2009 v České republice.

Struktura příspěvku je následující. První kapitola je věnována vymezení rizik týkajících se životního pojištění a jejich řízení v rámci směrnice Solvency II. Dále bude popsán Lee-Carterův model pro modelování míry úmrtnosti. Praktická část bude věnována aplikaci modelu pro Českou republiku.

[1] Ing. Ingrid Petrová, VSB-Technical University Ostrava, Faculty of Economics, Department of Finance, Sokolská třída 33, Ostrava 1, ingrid.petrova@vsb.cz.
Tento příspěvek vznikl za podpory projektu SGS VŠB-TU Ostrava SP2011/7.

2. Riziko životního pojištění

V posledních letech se zvyšuje míra pozornosti v pojišťovnictví z hlediska kvantifikace rizik, kterým jsou pojišťovny v rámci své činnosti vystaveny. Významnou změnou by mělo být zvýšení vnitřního zaměření pojišťoven na měření a řízení rizik a zavedení nové regulatorní směrnice v oblasti pojišťovnictví Solvency II, která bude platná od roku 2013.

Zavedením směrnice Solvency II dojde k regulatorním změnám pro stanovení solventnostního požadavku pojišťoven. Solventnostní kapitálový požadavek by měl odpovídat Value at Risk na hladině pravděpodobnosti 99,5 % a časovému horizontu jednoho roku. Pojišťovny by dle standardního přístupu měly stanovovat solventnostní kapitálový požadavek alespoň pro rizika operační, tržní, úpadku protistrany, životní, neživotní a zdravotní.

Zaměříme-li se na riziko životního pojištění, lze jej definovat jako riziko vyplývající z podepsání smlouvy, kterou se pojišťovny zavazují vyplácet či vyplatit určitou částku v budoucnosti pojištěným osobám. Finanční výkonnost životních pojišťoven je závislá na výskytu možné odchylky od předpokládané míry úmrtnosti v době, kdy byly uzavřeny pojistné smlouvy. Důležitými riziky v rámci životního pojištění, která je nutné kvantifikovat, jsou rizika úmrtnosti a dlouhověkosti. Riziko úmrtnosti je řešeno v případě, že pojištěný zemře dříve, než pojišťovna očekává. Naopak riziko dlouhověkosti vzniká tehdy, pokud pojištěný žije déle, než pojišťovna očekává, protože v tomto případě je povinna vyplácet pojistné plnění delší dobu. Právě změna v míře úmrtnosti směrem k prodlužování délky života představuje pro pojišťovny již zmíněné riziko dlouhověkosti. Úmrtnostní tabulky jsou vhodným nástrojem pro kvantifikaci očekávané délky života.

Pro predikci míry úmrtnosti existují jak deterministické, tak stochastické modely. Existuje několik často používaných úmrtnostních modelů. Jedním ze stochastických modelů, který byl úspěšně aplikován v několika zemích, je Lee-Carterův model. Dalším modelem, který lze považovat za verzi Lee-Carterova modelu je Renshaw-Haberman model (Renshaw a Haberman, 2006), který navíc zahrnuje skupinový efekt. Dále Cairns, Blake a Dowd model (2006) bere v úvahu základní úmrtnost místo střední míry úmrtnosti.

3. Lee-Carterův model

Lee-Carterův model (1992) je definován pomocí rovnice pro určení logaritmu střední míry úmrtnosti ve věku *x* v daném roce *t*, a to

$$\ln(m_{xt}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{xt}, \quad t = 1,2,...T, \qquad x = 1,2,..n. \tag{1}$$

kde a_x, b_x, k_t jsou parametry modelu ε_{xt} je chyba modelu za předpokladu Gaussova rozdělení $N(0,\sigma^2)$. Parametr a_x představuje průměrnou úmrtnost pro určitý věkový profil, k_t je index úmrtnosti v čase, který udává obecnou úroveň úmrtnosti a parametr b_x vyjadřuje stav, jak se mění míra úmrtnosti v daném věku *x*, když se mění index úmrtnosti jako reakce na změnu v obecné míře úmrtnosti.

Parametr a_x je vyjádřen jako průměr logaritmů střední míry úmrtnosti ve věku *x* a pro jednotlivé roky *t* za celkové období, a to

$$a_x = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ln(m_{xt}). \tag{2}$$

Pro jedinečné řešení modelu, je nutné brát v úvahu následující podmínky, a to suma čtverců parametrů b_x je rovna jedné, $\sum_x b_x^2 = 1$ a suma indexů úmrtnosti k_t je rovna nule, $\sum_t k_t = 0$.

Pro odhad parametrů modelu lze využít např. metodu nejmenších čtverců či metodu maximální věrohodnosti. Na datech severských zemí bylo dokázáno, viz Koissi a kol., že nejlepší možností pro odhad indexu úmrtnosti je singulární rozklad. Pro odhad parametrů b_x a k_t bude tedy v rámci Lee-Carterova modelu vyžito singulárního rozkladu – Singular Value Decomposition (SVD) pro matici

$$Z_{x,t} = \ln(m_{x,t}) - \hat{a}_x = b_x k_t . \tag{3}$$

Aplikací singulárního rozkladu na matici $Z_{x,t}$ získáme tři matice

$$SVD(Z_{x,t}) = ULV' = L_1 U_{x1} V_{t1} + ... + L_X U_{xX} V_{xT} , \tag{4}$$

kde matice U představuje věkový komponent, matice L je diagonální matice singulárních hodnot a matice V reprezentuje časový komponent.

Parametr $\hat{b}_x$ je odvozen od prvního vektoru matice vztahující se k věkovému komponentu, $\hat{b}_x = U_{x1}$ a parametr $\hat{k}_t$ je stanoven jako součin prvního vektoru matice týkající se časového komponentu a první singulární hodnoty, $\hat{k}_t = L_1 V_{t1}$.

Pro predikci indexu úmrtnosti pomocí Lee-Carterova modelu byl použit model ARIMA (0,1,0). Bylo zjištěno, že ze zkoumaných přístupů pro predikci, je index úmrtnosti vystižen velmi dobře. Vztah pro výpočet je následující

$$\hat{k}_t = \hat{k}_{t-1} + \theta + \xi_t , \tag{5}$$

kde θ je drift modelu a je určen jako $\theta = (\hat{k}_T - \hat{k}_1)/T - 1$ a pro $\xi_t \approx N(0, \sigma^2_{rw})$ se předpokládá Gaussovo rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem σ^2_{rw}, který je určen jako $\sigma^2_{rw} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (\hat{k}_{t+1} - \hat{k}_t - \hat{\theta})^2$.

Pro predikci indexu úmrtnosti $\hat{k}_{T+(\Delta t)}$ pro období $T + (\Delta t)$ je využit následující vztah pro výpočet

$$\hat{k}_{T+(\Delta t)} = \hat{k}_T + (\Delta t)\hat{\theta} + \sqrt{\Delta t}\, \xi_t . \tag{6}$$

Logaritmus střední míry úmrtnosti pro daný věk x a pro období $T + (\Delta t)$ lze pak získat pomocí

$$\ln(m_{x,T+\Delta t}) \approx \hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{k}_{T+(\Delta t)} . \tag{7}$$

4. Aplikační část

Tato část bude věnována vymezení použitých dat pro modelování úmrtnosti a aplikaci Lee-Carterova modelu pro české údaje.

4.1 Data

Pro účely tohoto příspěvku budou využita data dostupná na webových stránkách Českého statistického úřadu[2], a to podrobné úmrtností tabulky pro muže a ženy, tj. s jednoletým věkovým intervalem pro období 1920 – 2009. V letech 1938 – 1944 došlo k přerušení časové řady. Podrobné úmrtnostní tabulky obsahují ukazatele, jako jsou pravděpodobnost úmrtí, pravděpodobnost dožití, tabulkový počet dožívajících, tabulkový počet zemřelých, tabulkový počet žijících a střední délka dožití neboli naděje dožití.

[2] Dostupné z http://www.czso.cz/.

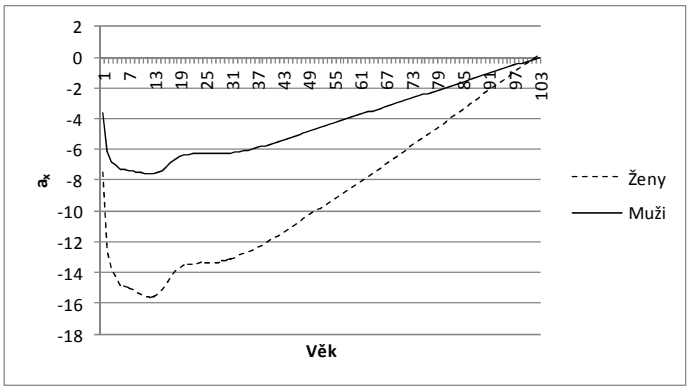
4.2 Aplikace Lee-Carterova modelu

Lee-Carter model bude aplikován pro odhad týkající se celého období tedy 1920 – 2009 pro věk 0 – 103. Aby mohl být proveden odhad parametrů, je v první řadě nutné z dostupných dat určit střední míru úmrtnosti $m_{x,t}$ v daném věku x a v roce t pomocí vztahu pro výpočet pravděpodobnosti úmrtí

$$q_{x,t} = 1 - e^{-m_{xt}} . \tag{8}$$

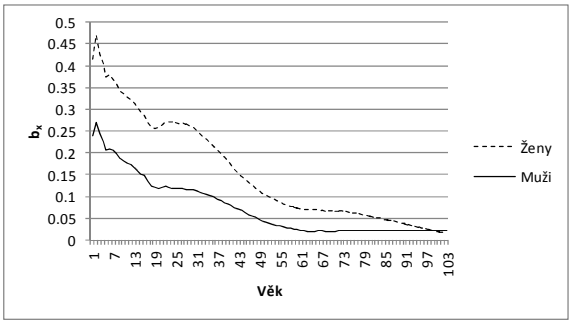
Po zjištění střední míry úmrtnosti $m_{x,t}$ pro daný věk x a rok t, lze již dle vztahu (2) jednoduše určit parametr $\hat{a}_x$. V grafu č. 1 je zobrazen vývoj parametru $\hat{a}_x$. Tento parametr vyjadřuje obecnou vlastnost úmrtnosti v daném věku. Z grafu je patrný obecně rostoucí trend úmrtnosti mužů a žen s tím, že pro nižší věkové kategorie je zřejmá nízká úmrtnost a s rostoucím věkem roste úmrtnost.

Graf č. 1: Srovnání parametru a_x pro může a ženy

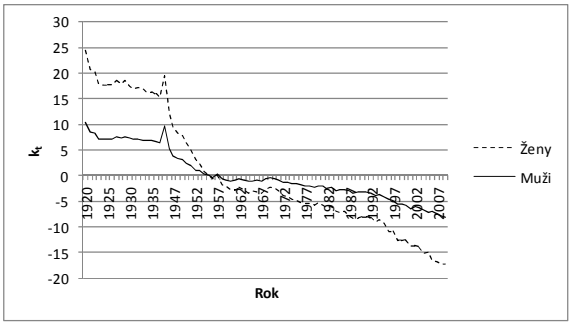


Nyní budou odhadnuty parametry $\hat{b}_x$ a $\hat{k}_t$, přičemž je v první řadě nutné určit matici $Z_{x,t}$, která bude pomocí metody SVD rozložena na tři matice. V příloze v Tab. č. 1 jsou uvedeny odhadnuté hodnoty parametrů $\hat{a}_x$ a $\hat{b}_x$ pro muže a ženy. V následujících grafech je zobrazen vývoj odhadnutých parametrů.

Graf č. 2: Odhad parametru $\hat{b}_x$ pro muže a ženy



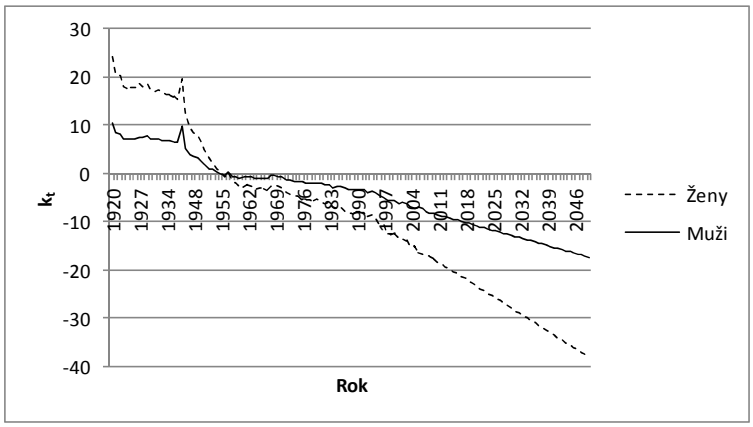
Graf č. 3: Odhad parametru $\hat{k}_t$ pro muže a ženy



Parametr $\hat{b}_x$ vyjadřuje tendenci úmrtnosti v daném věku, která by se měla měnit jako obecná míra úmrtnosti. To znamená, že pokud je parametr $\hat{b}_x$ vyšší pro daný věk *x,* je změna míry úmrtnosti pro tentýž věk x více odlišná od obecné míry úmrtnosti a naopak. Index úmrtnosti $\hat{k}_t$ zachycuje trend míry úmrtnosti v čase. Z grafu je patrný klesající trend míry úmrtnosti.

Predikce indexu úmrtnosti je provedena do roku 2050 na základě vztahu (5). Vývoj indexu úmrtnosti je zobrazen v následujícím grafu.

Graf č. 4 Predikce indexu úmrtnosti



Z grafu je patrný klesající trend indexu úmrtnosti jak pro muže, tak ženy, přičemž index úmrtnosti pro ženy klesá rychleji.

Závěr

Cílem příspěvku bylo pomocí Lee-Carterova modelu zjistit trend úmrtnosti na základě dat z úmrtnostních tabulek za období 1920 – 2009 v České republice.

Pomocí Lee-Carterova modelu jsme se pokusili identifikovat běžný trend míry úmrtnosti v České republice na základě historických dat. Lze konstatovat, že jak pro muže, tak ženy je patrný klesající trend míry úmrtnosti v čase. Toto bylo potvrzeno i na základě predikce indexu úmrtnosti pomocí ARIMA modelu.

Predikce míry úmrtnosti populace je předmětem zájmu mnoha institucí jako např. pojišťoven či penzijních fondů, proto je důležité vhodně předpovídat a kvantifikovat dopady demografických změn. Tyto změny mohou mít vliv například na vyplácení výše pojistného plnění klientům pojišťoven. Navíc by se v rámci stanovení solventnostního kapitálového požadavku pro riziko životního pojištění v rámci směrnice Solvency II mělo brát v úvahu také riziko dlouhověkosti.

Literatura

[1] CAIRNS, A. J. G, BLAKE, D., DOWD, K.: *Modelling and Management of Mortality Risk: A Review*. Discussion paper Pension institute. 2008.

[2] CRUZ, M.: The Solvency II Handbook. Risk Books, a Division of Incisive Financial Publishing Ltd.2009.

[3] GIROSI, F., KING, G.: *Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method*

[4] LEE, R. D, CARTER, L. R.: Modeling and Forecasting U. S. Mortality. Journal of the American Statistical Association. Vol. 87, No. 419. pp. 659-671. 1992.

[5] LEE, R.: The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications. North American actuarial journal. 2000.

[6] RENSHAW, A. E., HABERMAN, S. A.: cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics* 38, 556-570, (2006).

[7] WANG, J. Z.: *Fitting and Forecasting Mortality for Sweden: Applying the Lee-Carter model.* Mathematical Statistics, Stockholm University. 2007.

[8] SIU-HANG, L. WAI-SUM, CH.: The Lee-Carter Model for Forecasting Mortality, Revisited.

Příloha

Tab. č. 1: Hodnoty odhadnutých parametrů modelu pro muže a ženy

Věk	a_x		b_x		Věk	a_x		b_x		Věk	a_x		b_x	
	Muži	Ženy	Muži	Ženy		Muži	Ženy	Muži	Ženy		Muži	Ženy	Muži	Ženy
0	-3,6311	-3,88605	0,238815	0,177847	**35**	-5,97754	-6,55544	0,098771	0,116511	**70**	-2,88486	-3,34721	0,020025	0,045451
1	-6,19394	-6,34958	0,26924	0,20263	**36**	-5,90831	-6,48876	0,094197	0,112384	**71**	-2,79659	-3,23338	0,020777	0,044871
2	-6,80196	-6,95357	0,24589	0,180496	**37**	-5,83632	-6,41514	0,08903	0,108103	**72**	-2,70818	-3,12183	0,021627	0,044126
3	-7,02475	-7,25988	0,224532	0,179468	**38**	-5,75384	-6,33887	0,084622	0,103823	**73**	-2,62158	-3,00889	0,022079	0,04278
4	-7,27625	-7,53825	0,206073	0,16774	**39**	-5,67522	-6,25925	0,081096	0,099239	**74**	-2,53467	-2,89711	0,022441	0,041355
5	-7,29706	-7,57135	0,208508	0,169802	**40**	-5,59243	-6,1727	0,078186	0,093525	**75**	-2,44691	-2,78548	0,022435	0,040119
6	-7,36992	-7,64576	0,205938	0,163677	**41**	-5,50502	-6,08425	0,074735	0,088067	**76**	-2,35907	-2,67512	0,022465	0,038399
7	-7,42008	-7,73811	0,196648	0,160006	**42**	-5,41573	-6,00439	0,070195	0,083185	**77**	-2,26897	-2,56692	0,022345	0,037099
8	-7,452	-7,8307	0,186338	0,155808	**43**	-5,33086	-5,92088	0,066988	0,079542	**78**	-2,17867	-2,45717	0,022311	0,035618
9	-7,52167	-7,92227	0,182072	0,153368	**44**	-5,24089	-5,83688	0,06279	0,076353	**79**	-2,09043	-2,34922	0,0222	0,033906
10	-7,57109	-7,98302	0,175247	0,150892	**45**	-5,14902	-5,75632	0,058421	0,073346	**80**	-2,00069	-2,24121	0,021964	0,032045
11	-7,60859	-7,98459	0,172131	0,148943	**46**	-5,05765	-5,66754	0,055026	0,069958	**81**	-1,91027	-2,13142	0,022033	0,030429
12	-7,59433	-7,96925	0,165123	0,148708	**47**	-4,96297	-5,57666	0,050804	0,067145	**82**	-1,81963	-2,02303	0,022115	0,028712
13	-7,5202	-7,8977	0,159317	0,147299	**48**	-4,86456	-5,4867	0,047059	0,06502	**83**	-1,72991	-1,91333	0,022306	0,027049
14	-7,3642	-7,77167	0,152349	0,1432	**49**	-4,76732	-5,39389	0,044358	0,063573	**84**	-1,64077	-1,80379	0,022311	0,025337
15	-7,15161	-7,59982	0,148308	0,138774	**50**	-4,67421	-5,30791	0,04119	0,062288	**85**	-1,55237	-1,69134	0,022544	0,023528
16	-6,85255	-7,43312	0,133351	0,136288	**51**	-4,57754	-5,22314	0,038728	0,060965	**86**	-1,46286	-1,58018	0,022337	0,021778
17	-6,62004	-7,29485	0,124427	0,135223	**52**	-4,48601	-5,13909	0,03622	0,058983	**87**	-1,37127	-1,46947	0,022393	0,019921
18	-6,45861	-7,21128	0,120138	0,136774	**53**	-4,39211	-5,05586	0,033373	0,057175	**88**	-1,28129	-1,35889	0,022518	0,018115
19	-6,36178	-7,16237	0,11906	0,139163	**54**	-4,29929	-4,9698	0,031284	0,055748	**89**	-1,19092	-1,24832	0,022534	0,016295
20	-6,31749	-7,15893	0,120047	0,144522	**55**	-4,21072	-4,879	0,029261	0,054014	**90**	-1,10057	-1,13785	0,022547	0,014436
21	-6,30426	-7,14435	0,122144	0,148737	**56**	-4,12237	-4,79177	0,027049	0,05289	**91**	-1,01025	-1,02738	0,022572	0,012565
22	-6,27658	-7,13249	0,120164	0,151118	**57**	-4,03011	-4,69569	0,025794	0,051741	**92**	-0,91988	-0,9169	0,022595	0,010684
23	-6,27112	-7,10289	0,119127	0,150864	**58**	-3,93517	-4,6004	0,024798	0,050989	**93**	-0,82948	-0,80643	0,022617	0,008793
24	-6,28406	-7,07665	0,118359	0,150626	**59**	-3,84009	-4,50043	0,023479	0,050122	**94**	-0,73904	-0,69595	0,022637	0,006895
25	-6,29999	-7,06054	0,116934	0,15075	**60**	-3,74923	-4,40155	0,022142	0,050192	**95**	-0,64858	-0,58548	0,022657	0,004989
26	-6,30869	-7,04906	0,116643	0,151177	**61**	-3,6619	-4,30115	0,020755	0,049908	**96**	-0,55808	-0,47501	0,022676	0,003076
27	-6,30772	-7,02285	0,115996	0,149517	**62**	-3,5762	-4,20476	0,019591	0,049931	**97**	-0,46757	-0,36453	0,022694	0,001158
28	-6,28395	-6,99291	0,115404	0,146776	**63**	-3,48881	-4,10196	0,019478	0,049664	**98**	-0,37704	-0,25407	0,022712	-0,00077
29	-6,25588	-6,94361	0,114127	0,143115	**64**	-3,40134	-3,99817	0,019936	0,049243	**99**	-0,28649	-0,1436	0,022729	-0,00269
30	-6,22425	-6,8865	0,111696	0,139569	**65**	-3,3154	-3,89065	0,020232	0,048472	**100**	-0,19592	-0,03314	0,022746	-0,00463
31	-6,18542	-6,82805	0,108369	0,135695	**66**	-3,22988	-3,78572	0,020211	0,047974	**101**	-0,10534	0,077323	0,022763	-0,00656
32	-6,13835	-6,7607	0,105574	0,131087	**67**	-3,14365	-3,67944	0,019729	0,047054	**102**	-0,01475	0,187779	0,02278	-0,0085
33	-6,09247	-6,69562	0,103781	0,125982	**68**	-3,05677	-3,5701	0,019912	0,046554					
34	-6,03714	-6,62724	0,101806	0,121024	**69**	-2,97102	-3,45944	0,019675	0,046065					