Stanovení hodnoty projektů a firmy s možností dynamické vícenásobné flexibility na bázi reálných switch opcí

Zdeněk Zmeškal[1]

Abstrakt

V příspěvku je popsána problematiku aplikace reálných opcí s možností sekvenčního rozhodování na bázi dynamického Bellmanova principu optimality. Popsány jsou principy oceňování opcí, rizikově-neutrální pravděpodobnost, switch opce, vícenásobné modely rozhodování a oceňování. Uveden je rovněž aplikační příklad. Bylo ověřeno a vysvětleno, že zobecněný flexibilní přístup reflektuje lépe podmínky rozhodování, zejména s ohledem na setrvačnost, hysterezi a aspekty budoucích možností.

Klíčová slova

Reálná opce, rizikově-neutrální pravděpodobnost, dynamický Bellmanův princip optimality, switch opce, stochastický dynamický optimalizační model

1 Úvod

Reálnými opcemi se rozumí pružný (flexibilní) přístup při finančním rozhodování o reálných aktivech (aktiva, dluh, vlastní kapitál, investice, půda, komodity, náklady výzkumu, technologie, proces, produkce) při strategickém rozhodování nefinančních firem. Metodologie reálných opcí bere v úvahu další možnosti rozhodování a tudíž reflektuje tuto možnost při stanovení hodnoty reálných aktiv a projektů ve srovnání s pasivním přístupem. Oproti tradičním přístupům založeným na pasivních strategiích se tedy uvažuje s aktivními zásahy v budoucnosti při řízení reálných projektů. Například se jedná o opuštění, dočasné zastavení, rozšíření, odložení, změnu parametrů projektu, prodej, koupi, změnu technologie, procesu nebo struktury produkce apod. Metodologie reálných opcí je založena na metodice finančních opcí s tím, že je aplikována na reálná aktiva..

Problematika reálných opcí je ve středu pozornosti akademické i manažerské komunity. Za základní zdroje zpracovávající tuto problematiku lze považovat zejména: Trigeorgis (1998), Sick (1995), Dixit&Pindyck (1994), Brennan&Trigeorgis (1999).

Charakteristickým rysem je, že aplikace reálných opcí má převážně charakter amerických opcí a lze je oceňovat na bázi stochastického dynamického programování založeném na Bellmanově dynamickém principu optimality. Dalším rysem je to, že modely oceňování reálných opcí jsou vzhledem k typu ekonomických procesů a složitosti náhodných procesů a rozhodovacích funkcí zpravidla řešeny jako diskrétní modely binomického nebo multinomického typu. Přitom základní přístup k oceňování vychází z replikační strategie na bázi rizikově neutrálního přístupu. Obecně se pak jedná o aplikaci principu martingale při oceňování.

Cílem příspěvku je ověřit možnosti aplikace metodiky reálných opcí při oceňování firmy a hodnocení projektů. Hlavním záměrem je přitom popsat a aplikovat zobecněný flexibilní

[1] prof. Dr. Ing. Zdeněk Zmeškal, katedra Financí, Ekonomická fakulta VŠB-TU Ostrava, Sokolská 33, Ostrava 701 21, zdenek.zmeskal@vsb.cz
Tento příspěvek vznikl v rámci projektu Grantové agentury České republiky (GAČR) 402/04/1357.

přístup pro vícenásobné rozhodování na bázi reálných switch opcí. Bude aplikován stochastický dynamický model dle Bellmanova principu optimality. Součástí je rovněž ověřovací ilustrativní příklad prezentující možnosti aplikace metodologie reálných opcí na bázi uvedeného flexibilního vícenásobného switch přístupu při oceňování podniků a projektů.

2 Charakteristika a popis replikační strategie

Obecným principem oceňování je takzvaný martingale princip, který říká, že aktuální hodnota nějaké veličiny se musí rovnat střední hodnotě dané veličiny v následujícím období, to znamená, že náhodný proces této veličiny nevykazuje žádný trend. Při rizikově neutrálním přístupu je touto veličinou poměr náhodné hodnoty aktiva a bezrizikového aktiva, tedy

$\frac{V_t}{e^{r\cdot t}} = \frac{\widehat{E}(V_{t+dt})}{e^{r\cdot(t+dt)}}$, po úpravě pak pro oceňování platí, že

$$V_t = e^{-r\cdot dt} \cdot \widehat{E}(V_{t+dt}). \tag{1}$$

Aby byla splněna podmínka pro martingale, je nutné transformovat skutečné rozdělení pravděpodobnosti na umělou rizikově–neutrální pravděpodobnost. Pro reálná aktiva je charakteristické, že vývoj hodnoty vykazuje zpravidla trend. Proto, aby byla splněna u mean-variance modelů podmínka martingale, pak se pozorované (tržní) rozdělení pravděpodobnosti v porovnání s rizikově-neutrálním rozdělením pravděpodobnosti liší ve velikosti střední hodnoty a rozptyl je v obou případech stejný.

2.1 Odvození replikační strategie

Pro vysvětlení základních principů metodologie reálných opcí budeme předpokládat dokonalý (úplný) trh, aktivum, z kterého jsou vypláceny důchody (dividendy, kupónové platby apod.) proporcionálně k ceně aktiva. Bude aplikována replikační strategie pro binomický model a jeden rizikový (náhodný) faktor. Půjde o diskrétní model s tím, že v mezidobí pro snadnost zápisu bude uvažováno spojité úročení.

U replikační strategie se vychází z toho, že je vytvořeno portfolio z podkladového (rizikového) aktiva S a bezrizikového aktiva B tak, aby při jakémkoliv vývoji byla replikována hodnota derivátu f_t, tzn. aby hodnota portfolia byla identická hodnotě derivátu.

Hodnota portfolią Π_t na začátku v čase t,

$$\Pi_t \equiv a \cdot S_t + B_t = f_t, \tag{2}$$

hodnota portfolia na konci v čase $t + dt$ při růstu ceny,

$$\Pi_{t+dt} \equiv a \cdot S^u_{t+dt} + B_t \cdot e^r = f^u_{t+dt}, \tag{3}$$

hodnota portfolia na konci v čase $t + dt$ při poklesu ceny,

$$\Pi_{t+dt} \equiv a \cdot S^d_{t+dt} + B_t \cdot e^r = f^d_{t+td}, \tag{4}$$

kde S je hodnota podkladového aktiva, a je množství podkladových aktiv, B je hodnota bezrizikového aktiva, f je hodnota derivátu, r je bezriziková sazba, u (d) jsou indexy pro růst (pokles) cen podkladového aktiva, S^u_{t+dt} $\left(S^d_{t+dt}\right)$ jsou ceny podkladových aktiv při růstu (poklesu).

V době realizace se cena opce rovná její vnitřní hodnotě (výplatní funkci),

$$f^u_{t+dt} = VH^u_{t+dt} \text{ nebo } f^d_{t+dt} = VH^d_{t+dt}. \tag{5}$$

Například pro call opci $VH^u_{t+dt} = max\left(S^u_{t+dt} - X;0\right)$ a put opci $VH^u_{t+dt} = max\left(X - S^u_{t+dt};0\right)$, kde X je realizační cena.

Řešením soustavy rovnic (2), (3) a (4) pro neznámé a, B, f_t lze získat jednoznačný obecný vztah pro výpočet ceny opce,

$$f_t = e^{-r} \cdot \left\{ f_{t+dt}^u \cdot \left[\frac{e^r \cdot S_t - S_{t+dt}^d}{S_{t+dt}^u - S_{t+dt}^d} \right] + f_{t+dt}^d \cdot \left[\frac{S_{t+dt}^u - e^r \cdot S_t}{S_{t+dt}^u - S_{t+dt}^d} \right] \right\}. \tag{6}$$

To se dá zjednodušeně zapsat za předpokladu, že rizikově neutrální pravděpodobnost růstu,

$$\widehat{p} = \frac{e^r \cdot S_t - S_{t+dt}^d}{S_{t+dt}^u - S_{t+dt}^d}, \tag{7}$$

takto

$$f_t = e^{-r} \cdot \left[f_{t+dt}^u \cdot (\widehat{p}) + f_{t+dt}^d \cdot (1 - \widehat{p}) \right] \tag{8}$$

a nebo

$$f_t = e^{-r} \cdot \widehat{E}(f_{t+dt}), \tag{9}$$

kde $\widehat{E}(f_{t+dt})$ je rizikově neutrální střední hodnota, aby bylo možné replikovat cenu opce. Nejedná se tedy o tržní (pozorovaný) růst ani subjektivní střední hodnotu.

Podle (9) je tedy cena opce obecně rovna současné hodnotě rizikově neutrální střední hodnoty ceny opce následujícího období, což odpovídá obecnému principu martingale, viz rovnice (1).

Vyjádříme-li v našem případě ceny podkladových aktiv při proporcionální výplatě důchodu c podle geometrického Brownova pohybu následovně:

$$S_{t+dt}^u = S_t \cdot e^{u+c}; \quad S_{t+dt}^d = S_t \cdot e^{d+c}, \tag{10}$$

dosadíme do (6) a upravíme, pak

$$\widehat{p} = \frac{e^{(r-c)} - e^d}{e^u - e^d}. \tag{11}$$

To lze zobecnit po dosazení za rizikově neutrální růst $\widehat{g} = r - c$ takto,

$$\widehat{p} = \frac{e^{\widehat{g}} - e^d}{e^u - e^d}. \tag{12}$$

Za předpokladu proporcionálního vývoje důchodu a nákladů lze aplikovat výše uvedený obecný postup s tím, že bude modifikován rizikově neutrální růst $\widehat{g}$ při stanovení rizikově neutrální pravděpodobnosti $\widehat{p}$. Dále jsou uvedeny jednotlivé případy.

Opce na aktivum bez výplaty důchodu	$\widehat{g} = r$
Opce na aktivum s výplatou důchodu c	$\widehat{g} = r - c$
Opce na komoditu se skladovacími náklady s	$\widehat{g} = r + s$
Opce na měnu s bezrizikovým výnosem cizí měny r_f	$\widehat{g} = r - r_f$
Opce na obligace s kupónovým výnosem y	$\widehat{g} = r - y$
Opce na komoditu s důchodem c a náklady s	$\widehat{g} = r + s - c$
Opce s podkladovým aktivem futures (forward)	$\widehat{g} = 0$
Opce s podkladovým aktivem dle mean-reversion procesu $dS = a(b - S_t)dt + \sigma \cdot S \cdot dZ$,	$\widehat{g} = a(b - S_t)dt$

Obecně tedy $\widehat{g} = r - q$, kde q je obecný výnos (c, r_f, y, $[r - a(b - S_t)]dt$,), nebo záporný náklad, (-s).

2.2 Procedura oceňování

Oceňování opcí diskrétním binomickým modelem v souladu s procedurou stochastického dynamického programování a rizikově neutrálním přístupem se provádí v těchto krocích.

(i) Stanovení rizikově neutrální hodnoty růstu pro danou opci $\widehat{g}$.

(ii) Vyjádření vývoje podkladového aktiva.

(a) Subjektivní přístup na základě odborného odhadu a předpovědi.

(b) Objektivní přístup na základě statistického odhadu náhodného procesu podkladového aktiva (např. aritmetický, geometrický Brownův proces, mean-reversion proces, Vašíčkův, CIR, Itoův proces apod.) z tržních dat.

V případě geometrického Brownova procesu se nejprve určí indexy růstu (poklesu) pro vyjádření volatility v souladu s pozorovanou tržní volatilitou, tedy za podmínky, že $u = -d$, $e^u = e^{\sigma \cdot \sqrt{dt}}$ a $e^d = e^{-\sigma \cdot \sqrt{dt}}$. Následovně, dle pozorované volatility se určí vývoj podkladového aktiva $S^u_{t+dt} = S_t \cdot e^u$; $S^d_{t+dt} = S_t \cdot e^d$.

(iii) V době realizace T se cena opce rovná vnitřní hodnotě, $f_T = VH_T$.

(iv) Zpětným postupem od doby realizace se stanoví cena opce pro jednotlivé uzly, které jsou dány časem a stavem až k počáteční hodnotě.

Pro evropskou opci v souladu s (8)

$$f_t = e^{-r} \cdot \left[f^u_{t+dt} \cdot (\hat{p}) + f^d_{t+dt} \cdot (1 - \hat{p}) \right].$$

Pro americkou opci vzhledem k možnosti využít opci průběžně

$$f_t = \max_q \left\{ VH_t ; e^{-r} \cdot \left[f^u_{t+dt} \cdot (\hat{p}) + f^d_{t+dt} \cdot (1 - \hat{p}) \right] \right\}. \tag{13}$$

Tato rovnice je zároveň Bellmanovou stochastickou rovnicí optimality dynamického programování. Přitom $\hat{p}$ udává rizikově neutrální pravděpodobnost definovanou výše.

Stanovení typu rozhodnutí, Q_t, buď využít nebo nevyužít opci lze takto:

$$Q_t = \arg\max_q \left\{ VH_t ; e^{-r} \cdot \left[f^u_{t+dt} \cdot (\hat{p}) + f^d_{t+dt} \cdot (1 - \hat{p}) \right] \right\}. \tag{14}$$

Přitom symbol *argmax* znamená argument funkce maximum.

(v) Hledaná cena opce f_0 odpovídá ceně na počátku celého období.

(vi) Analýza citlivosti na vstupní data.

2.3 Oceňování opcí v případě tržní neobchodovatelnosti podkladového aktiva

Pokud není u reálných opcí podkladové aktivum obchodovatelné na sekundárních trzích, pak, pokud existuje derivát na toto aktivum, lze parametry růstu $\hat{g}$ odvodit z ceny derivátu. Zpravidla existuje a bývá ověřena vysoká korelace mezi derivátem a podkladovým aktivem. Například, v případě existence futures na podkladové aktivum s výplatou dividendy

$$F_{t,T} = F_t \cdot e^{r-c}.$$

Pokud takové aktivum neexistuje, pak lze vyjít z podmínky, že všechna aktiva by měla mít v rovnováze poměr výnosu a rizika odpovídající tržní ceně rizika λ,

$\lambda = \dfrac{r_M - r}{\sigma_M}$, kde r_M, σ_M je výnos a směrodatná odchylka tržního portfolia.

Pro tržní výnos daného aktiva vzhledem k tržního ceně rizika platí, že

$$q + \mu = r + \lambda \cdot \sigma. \tag{15}$$

Přitom μ je očekávaný rizikově upravený tržní výnos aktiva, σ je tržní směrodatná odchylka neobchodovatelného aktiva. Z (15) obecně vyplývá, že

$$\hat{g} = r - q = \mu - \lambda \cdot \sigma. \tag{16}$$

3 Stochastické dynamické programování

Dynamické programování představuje úlohu optimálního řízení na základě optimální trajektorie rozhodování. Je to způsob optimalizace více-etapových rozhodovacích procesů založeném na Bellmanově principu optimality. Stochastické dynamické programování oproti deterministickému dynamickému programování znamená, že celý proces a rozhodování se odehrává v náhodném prostředí.

U tohoto přístupu optimalizovat celý proces znamená, že je možné optimalizovat každou etapu zvlášť, přičemž optimalizace jednotlivých etap znamená zároveň i optimalizaci celého procesu. Pro takovéto dynamické systémy je vždy výsledný stav systému závislý na všech jeho předchozích stavech a tedy rovněž na stavu počátečním. Optimální rozhodnutí je přitom činěno s ohledem na budoucí možné stavy systému a rovněž budoucí (forward-looking) optimální rozhodnutí.

Bellmanův princip optimality, který je považován za axiom znamená, že ať je výchozí rozhodnutí (počáteční stav systému) jakékoliv, posloupnost následujících rozhodnutí musí tvořit optimální strategii (trajektorii rozhodnutí) vzhledem ke stavu plynoucímu z předešlého rozhodnutí.

Aby bylo možné tento princip aplikovat, je jednou z klíčových podmínek to, že celý proces lze rozdělit na dílčí etapy a účelová funkce musí být separovatelná. Tedy celková optimalizační funkce musí být vyjádřitelná jako agregace dílčích optimalizačních funkcí pro jednotlivé etapy. Vlastní výpočet se pak provádí tak, že se postupuje rekurentně od poslední etapy k počáteční, tedy v opačném směru průběhu procesu.

Předpoklady pro možnost použití stochastického dynamického programování jsou: proces lze rozčlenit na jednotlivé etapy; etapy lze charakterizovat možnými stavy procesu jako stavy náhodného procesu; rozhodnutí v jednotlivých etapách je charakterizováno módem (např. technologie, zařízení, proces); proměnné charakterizující vývoj procesu se rozlišují na řídící, stanovují mód, a řízené, popisující stav systému; souhrnná účelová funkce musí být separovatelná, tedy vyjádřitelná jako agregace dílčích účelových funkcí.

Problém řešitelný stochastickým dynamickým programováním lze formulovat tak, že je zadán určitý počáteční stav a je nutné určit takovou trajektorii rozhodnutí, která zaručí optimální hodnotu souhrnné účelové funkce. Základem je rozdělení celého procesu (N-etapového extremalizačního procesu) na jednotlivé etapy, a pro každou se vyhledá optimální řešení. Tedy, na počátku každé etapy je systém v nějakém módu (technologický stav, stav systému, proces apod.) a na základě hodnoty optimalizačního kritéria pro danou etapu následuje rozhodnutí o přechodu do nového nebo zachování daného módu. Technika řešení spočívá v tom, že celý problém je převeden na postupné nalezení dílčích optimálních řešení. Přitom se postupuje od poslední etapy zpětně (backward) rekurentním postupem k počátku.

3.1 Odvození rekurentní formule pro kritérium současné hodnoty

Optimalizační kritérium současné hodnoty splňuje podmínku aditivity, takže lze aplikovat dynamické programování na základě Bellmanova principu optimality. Nejprve bude ukázáno jak lze za určitosti i za rizika vyjádřit a počítat současnou hodnotu rekurentně. Potom bude ukázán rekurentní postup pro maximalizaci střední hodnoty současné hodnoty při optimálním výběru trajektorie módů.

Současnou hodnotu finančních toků za předpokladu, že cash flow dané etapy je vynaloženo na jejím počátku lze počítat takto,

$$V_N = \sum_{t=0}^{N-1} \beta_t \cdot x_t \ ,$$

kde V_N je hodnota s N etapami do konce, $\beta_t = (1+R)^{-t}$ je diskontní faktor, x_t je cash flow na počátku dané etapy. To lze rozepsat takto

$$V_N = x_0 + \sum_{t=1}^{N-1} \beta_t \cdot x_t = x_0 + \beta \cdot \sum_{t=1}^{N-1} \beta_{t-1} \cdot x_t = x_0 + \beta \cdot \left[x_1 + \sum_{t=2}^{N-1} \beta_{t-1} \cdot x_t \right].$$

Tedy hodnotu dané etapy lze vyjádřit rekurentně v závislosti na následné etapě takto,

$$V_N = x_0 + \beta \cdot V_{N-1}, \text{ kde } V_{N-1} = x_1 + \sum_{t=2}^{N-1} \beta_{t-1} \cdot x_t .$$

Obdobně pro následné etapy platí

$$V_{N-1} = x_1 + \sum_{t=2}^{N-1} \beta_{t-1} \cdot x_t = x_1 + \beta \cdot \sum_{t=2}^{N-1} \beta_{t-2} \cdot x_t = x_1 + \beta \cdot \left[x_2 + \sum_{t=3} \beta_{t-2} \cdot x_t \right],$$

je zřejmé, že opět lze hodnotu dané etapy vyjádřit pomocí následné etapy

$$V_{N-1} = x_1 + \beta \cdot V_{N-2}, \text{ kde } V_{N-2} = x_2 + \sum_{t=3} \beta_{t-2} \cdot x_t .$$

Obecně pak pro hodnotu kterékoliv etapy platí, že

$$V_{N-k} = x_k + \sum_{t=k+1}^{N-1} \beta_{t-k} \cdot x_t = x_k + \beta \cdot \sum_{t=k+1}^{N-1} \beta_{t-(k+1)} \cdot x_t = x_k + \beta \cdot \left[x_{k+1} + \sum_{t=k+2}^{N-1} \beta_{t-(k+1)} \cdot x_t \right],$$

tedy hodnotu kterékoliv etapy lze stanovit pomocí následné etapy takto,

$$V_{N-k} = x_k + \beta \cdot V_{N-k-1}, \text{ kde } V_{N-k-1} = x_{k+1} + \sum_{t=k+2}^{N-1} \beta_{t-(k+1)} \cdot x_t \text{ pro } k \in [0; N-1] .$$

Jedná se o obecnou deterministickou rekurentní rovnici. Hodnotu poslední etapy pak lze vyjádřit takto

$$V_1 = x_{N-1} + \beta \cdot V_0 .$$

V případě stochastického (náhodného) procesu lze postupovat obdobně. Přitom na základě replikační strategie s rizikově-neutrální pravděpodobností je optimalizačním kritériem střední rizikově neutrální hodnota. Střední hodnota současné hodnoty činí

$$V_N = \widehat{E}\left[\sum_{t=0}^{N-1} \beta_t \cdot x_t \right] = \sum_{t=0}^{N-1} \beta_t \cdot \widehat{E}(x_t).$$

Analogicky jako v předchozím případě lze rozepsat střední hodnotu současné hodnoty rekurentně následovně

$$V_N = x_0 + \beta \cdot \widehat{E}[V_{N-1}], \text{ kde } \widehat{E}[V_{N-1}] = x_1 + \sum_{t=2}^{N-1} \beta_{t-1} \cdot \widehat{E}(x_t),$$

$$V_{N-k} = x_k + \beta \cdot \widehat{E}[V_{N-k-1}],$$

$$V_1 = x_{N-1} + \beta \cdot V_0 .$$

V předchozích případech bylo ukázáno, jak lze vyjádřit současnou hodnotu pro deterministický a stochastický proces pomocí rekurentních vztahů. Nyní bude přidána možnost rozhodování a výběru módu tak, aby byla nalezena optimální trajektorie a hodnota rozhodovacího více-etapového flexibilního náhodného procesu. Nejprve bude uveden případ, v němž lze využít pouze dva módy (technologie, procesy, produkty) A a B. Výchozím je mód A, a optimální trajektorie je hledána při maximalizaci střední hodnoty současné hodnoty. Přitom je při přepnutí z módu A do módu B nutné vynaložit investiční výdaje ve výši $C_{A,B}$.

Rekurentní vzorce pro řešení problému jsou následující:

$$V_N^A = \max_{A,B} \left[x_0^A + \beta \cdot \widehat{E}\left(V_{N-1}^A\right); x_0^B - C_{A,B} + \beta \cdot \widehat{E}\left(V_{N-1}^B\right) \right],$$

$$V_{N-k}^A = \max_{A,B} \left[x_k^A + \beta \cdot \widehat{E}\left(V_{N-k-1}^A\right); x_k^B - C_{A,B} + \beta \cdot \widehat{E}\left(V_{N-k-1}^B\right) \right] ,$$

$$V_1^A = \max_{A,B} \left[x_{N-1}^A + \beta \cdot V_0^A ; x_{N-1}^B - C_{A,B} + \beta \cdot V_0^B \right].$$

V případě možnosti přepínat a vybírat z většího počtu módů za předpokladu, že výchozím je mód m, následným je mód q, který je vybrán z množiny módů S, lze postupovat dle následujících optimalizačních rekurentních vzorců:

$$V_N^m = \max_{q \in S}\left[x_0^q + C_{m,q} + \beta \cdot \widehat{E}\left(V_{N-1}^q\right)\right], \tag{17}$$

$$V_{N-k}^m = \max_{q \in S}\left[x_k^q + C_{m,q} + \beta \cdot \widehat{E}\left(V_{N-1-k}^q\right)\right], \tag{18}$$

$$V_1^m = \max_{q \in S}\left[x_{N-1}^q + C_{m,q} + \beta \cdot V_0^q\right]. \tag{19}$$

To je zároveň obecná formulace úlohy stochastického optimálního řízení dle Bellmanova principu optimality s účelovou funkcí typu střední hodnoty současné hodnoty.

4 Příklad ocenění hodnoty firmy s možností dynamické flexibility na bázi switch reálných opcí

Hlavním záměrem je aplikovat zobecněný flexibilní přístup s možností dynamické volby různých módů (switch opce) a nalezení optimální trajektorie na bázi optimalizace střední hodnoty současné hodnoty firmy (projektu). Budou posuzovány tři varianty podle výchozího stavu firmy (systému): Varanta 1 – Mód A, Varianta 2 – Mód B, Varianta 3 – Mód C.

Bude aplikován model stochastického dynamického programování na bázi binomického modelu jako americké opce bez výplaty dividend, $\widehat{g} = r$, replikační strategie, rizikově neutrálního přístupu, maximalizace současné hodnoty střední hodnoty. Model vychází z dvoufázové metody, první fáze je náhodná pro 4 roky a druhá fáze je nenáhodná a rovná se perpetuitě. Přepokládá se, že výdaje na přepnutí z módu do módu jsou nesymetrické.

4.1 Procedura stochastického dynamického programování

Oceňování opcí diskrétním binomickým modelem v souladu s procedurou stochastického dynamického programování a rizikově neutrálním přístupem se provádí v těchto krocích.

(i) Stanovení rizikově neutrální hodnoty růstu pro danou opci $\widehat{g}$.

(ii) Vyjádření vývoje cash flow jako podkladového aktiva pomocí binomického modelu

(a) Subjektivní přístup na základě odborného odhadu a předpovědi

(b) Objektivní přístup na základě statistického odhadu náhodného procesu podkladového aktiva. V případě geometrického Brownova procesu pro cash flow, $x_{t+1,s+u}^u = x_{t,s} \cdot u$; $x_{t+1,s+d}^d = x_t \cdot d$.

(iii) K momentu počátku druhé fáze je stanovena hodnota za druhou fázi $V_{0,s}^q$, pro stav s a mód q.

(iv) Zpětným rekurentním postupem od konce první fáze se pro stavy a mód dané etapy dle rozhodnutí určí optimální hodnota dle optimálního rozhodnutí. Je aplikována Bellmanova stochastická rovnice optimality dynamického programování. Přitom $\widehat{p}$ udává rizikově neutrální pravděpodobnost definovanou výše, s je stav, q mód, N-k počet etap do konce první fáze.

Pro hodnotu s jednou etapou do konce první fáze,

$$V_{1,s}^m = \max_{q \in S}\left[x_{N-1,s}^q - C_{m,q} + \beta \cdot V_{0,s}^q\right].$$

Pro další etapy zpětným rekurentním postupem

$$V_{N-k,s}^{m} = \max_{q \in S}\left\{x_{k,s}^{q} - C_{m,q} + \beta \cdot \left[\widehat{p} \cdot V_{N-1-k,s+u}^{q} + \widehat{q} \cdot V_{N-1-k,s-d}^{q}\right]\right\}.$$

Pro hodnotu na počátku celého období (první etapy první fáze),

$$V_{N,s}^{m} = \max_{q \in S}\left\{x_{0,s}^{q} - C_{m,q} + \beta \cdot \left[\widehat{p} \cdot V_{N-1,s+u}^{q} + \widehat{q} \cdot V_{N-1,s-d}^{q}\right]\right\}.$$

(v) Stanovení typu rozhodnutí, $Q_{t,s}$, Varianta 1 – Mód A, Varianta 2 – Mód B,

Varianta 3 – Mód C: $Q_{t,s} = \arg\max_{q \in S}\left\{x_{k,s}^{q} - C_{m,q} + \beta \cdot \left[\widehat{p} \cdot V_{N-1-k,s+u}^{q} + \widehat{q} \cdot V_{N-1-k,s-d}^{q}\right]\right\}.$

(vi) Analýza citlivosti na vstupní data

4.2 Postup výpočtu a výsledy

Vstupními údaji jsou bezriziková sazba r = 10%, index růstu u = 1,2 a dále hodnoty počátku druhé fáze dle módu a stavu, $V_{0,s}^{q}$. V následující tabulce jsou uvedeny výdaje $C_{i,j}$ spojené s přepnutím mezi jednotlivými módy, samozřejmě, že zachování módu není spojeno s žádnými výdaji.

Výdaje $C_{i,j}$		Mód následný		
		A	B	C
Mód aktuální	A	0	5	-4
	B	-3	0	10000
	C	4	10000	0

Postup výpočtu v souladu s výše uvedenou procedurou a pro tři výchozí módy je uveden na Obr. 1

Souhrnné výsledky ukazující na hodnotu firmy s možností flexibilních módů (zásahů) pro tři módy: normální, rozšířená a zúžená produkce. Posuzovány jsou dle výchozích stavů (módů) všechny tři variant. Propočtené hodnoty dle výchozích módů činí 78,4 dále 73,4 a 68,4 p. j.

Z výsledků je zřejmé, že pokud je výchozím mód A, pak dojde k přepnutí do módu B, a ke konci za méně příznivých okolností k přepnutí do módu A a následně C. Pokud je výchozím módem mód B, pak je zachován, jedině za nepříznivého vývoje dochází k přepnutí do módu A. Pokud je výchozím mód C, pak dochází k přepnutí do módu A, a za nepříznivého stavu zpět do módu C. Z výsledků je tedy patrné, že výchozí stav systému determinuje výrazně optimální trajektorii rozhodnutí.

Dalo by se ukázat, že pokud by přepínací výdaje byly nulové nebo symetrické (přepnutí do módu a zpět), pak by bylo optimální vybrat mód s nejvyšším cash flow. Pokud však přepínací výdaje jsou nesymetrické a je možné použít více než dva módy, pak optimální rozhodnutí je ovlivněno budoucími možnostmi, projevuje se tedy značná setrvačnost a hysterézní efekt. Například, v případě nevratných projektů může být optimální odložit projekt i když NPV je pozitivní. Nebo může být optimální pokračovat v provozu i když je dočasně ztrátový apod.

Obr. 1 Postup stanovení hodnoty firmy s možností vícenásobné dynamické flexibility na bázi switch reálných opcí pro tři výchozí módy

Cash flow

	Mód A - NORMÁLNÍ						Mód B - ROZŠÍŘENÍ						Mód C - ZÚŽENÍ					
n/t	0	1	2	3	4	V_0	0	1	2	3	4	V_0	0	1	2	3	4	V_0
0	10,0	12,0	14,4	17,3	20,7	41,5	11,5	13,8	16,6	19,9	23,8	47,7	8,5	10,2	12,2	14,7	17,6	35,3
-2		8,3	10,0	12,0	14,4	28,8		9,6	11,5	13,8	16,6	33,1		7,1	8,5	10,2	12,2	24,5
-4			6,9	8,3	10,0	20,0			8,0	9,6	11,5	23,0			5,9	7,1	8,5	17,0
-6				5,8	6,9	13,9				6,7	8,0	16,0				4,9	5,9	11,8
-8					4,8	9,6					5,5	11,1					4,1	8,2

$$x_{t,n} = x_0 \cdot u^{(t+n)}$$

Předvýpočet

n/t	A 0	A 1	A 2	A 3	A 4	B 0	B 1	B 2	B 3	B 4	C 0	C 1	C 2	C 3	C 4
0	62,4	61,9	58,7	51,5	37,7	66,9	66,5	63,2	56,0	43,4	57,7	57,0	53,3	45,1	32,0
-2		41,7	39,5	34,5	26,2		46,2	43,9	38,9	30,1		37,5	35,1	30,2	22,3
-4			27,0	23,7	18,2			30,7	27,0	20,9			23,3	20,1	15,5
-6				17,5	12,6				19,0	14,5				13,9	10,7
-8					8,8					10,1					7,5

$$\widehat{E}(V_{t,s}) = \beta \cdot \left[\widehat{p} \cdot V^q_{t+1,s} + \widehat{q} \cdot V^q_{t+1,s-2}\right]$$

Současná hodnota

n/t	A 0	A 1	A 2	A 3	A 4	B 0	B 1	B 2	B 3	B 4	C 0	C 1	C 2	C 3	C 4
0	73,4	75,3	74,8	70,9	62,2	78,4	80,3	79,8	75,9	67,2	68,4	69,9	69,1	64,7	54,4
-2		50,8	50,4	47,7	41,7		55,8	55,4	52,7	46,7		46,1	45,5	42,5	36,6
-4			33,9	32,1	28,2			38,7	36,6	32,4			29,9	28,1	24,2
-6				23,3	20,6				26,3	22,6				19,3	16,6
-8					15,6					16,6					11,6

$$V^m_{t,s} = \max_{q \in S} \left\{x^q_{t,s} - C_{m,q} + \beta \cdot \left[\widehat{p} \cdot V^q_{t+1,s} + \widehat{q} \cdot V^q_{t+1,s-2}\right]\right\}$$

Aktuální mód

n/t	A 0	A 1	A 2	A 3	A 4	B 0	B 1	B 2	B 3	B 4	C 0	C 1	C 2	C 3	C 4
0	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	A	A	A	A	A
-2		B	B	B	B		B	B	B	B		A	A	A	A
-4			A	A	A			B	B	B			A	A	A
-6				A	C				A	A				A	C
-8					C					A					C

$$Q_{t,s} = \arg\max_{q \in S} \left\{x^q_{t,s} - C_{m,q} + \beta \cdot \left[\widehat{p} \cdot V^q_{t+1,s} + \widehat{q} \cdot V^q_{t+1,s-2}\right]\right\}$$

5 Závěr

V příspěvku byla diskutována a ověřována problematika možností aplikace metodiky reálných opcí při oceňování firmy a hodnocení projektů. Přitom bylo záměrem popsat a aplikovat zobecněný flexibilní přístup pro vícenásobné rozhodování na bázi reálných switch opcí. Základem byl popis a aplikace modelu stochastického dynamického programování dle Bellmanova principu optimality. Přitom byla aplikována z opční metodologie replikační strategie a rizikově neutrální přístup, jehož zobecněním je martingale metodologie.

Nejprve byl popsán princip replikační strategie a rizikově-neutrální přístup. Následně pak Bellmanův princip optimality a jeho aplikace pro případ stanovení současné hodnoty firmy nebo projektu. Pak byl odvozen obecný rekurentní postup optimalizace hodnoty projektu a firmy s možností vícenásobného rozhodování na bázi switch opcí a na bázi stochastického dynamického programování dle Bellmanova principu optimality.

Uvedená obecná flexibilní metodologie byla aplikována na příkladu při ohodnocení firmy pro tři varianty výchozích módů a s možností přepínání mezi těmito módy. Uvažovanými módy byla normální, rozšířená a zúžená produkce. Ukázalo se, že aplikací vícenásobného flexibilního přístupu na bázi switch opcí rozhodnutí více odpovídají realitě a že se projevuje značně setrvačnost a hysterézní efekt. Rovněž se ukázalo, že je vhodné posuzovat citlivost výsledků na vstupní údaje. Zvláště v tomto případě se jeví jako významný parametr ovlivňující řešení přepínací výdaje. Důležitým krokem je tedy analýza citlivosti na vstupní data. Zobecněný přístup řešení tohoto problému na bázi fuzzy množin je popsán např. v Zmeškal (1999, 2001, 2005).

Z předchozího vyplývá a je patrné, že je možné, užitečné a vhodné aplikovat metodologii reálných opcí v malé otevřené ekonomice v transformační fázi. Tedy aplikace reálných opcí lze považovat za zobecnění oceňování firem za rizika s možností vícenásobných aktivních zásahů. Aplikace této metodologie vede zpravidla k růstu hodnoty firmy a projektu, to znamená, že se rovněž zvyšují možnosti firem jak pro investice tak akvizice, což v konečném důsledku vede k rozšíření možností finančního a investičního rozhodování.

Literatura

[1] BLACK, F., SCHOLES, M. (1973), „The Pricing of Options and Corporate Liabilities“, *Journal of Political Economy*, Vol. 81., 637-659.

[2] BOYLE, P., LONGSTAFF, F.A., RITCHKEN, P. (1995), *Advances in Futures and Options Research*, JAI Press, Vol. 8.

[3] BRENNAN, M. J., TIGEORGIS, L. (1999), *Project, Flexibility, Agency and Product Market Competition: New Development in the Theory and Application of real Options Analysis*, Oxford university Press.

[4] COPELAND, T.E, WESTON, J.F. (1988), *Financial Theory and Corporate Finance*, Addison -Wesley.

[5] DAMODARAN, A. (1994), *Damodaran on Valuation, Security Analysis for Investment and Corporate Finance*, J. Willey & Sons, Inc., 350-351.

[6] DIXIT, A. K., PINDYCK, R.S. (1994), *Investment under Uncertainty*, University Press.

[7] DLUHOŠOVÁ, D.: *Přístupy k analýze finanční výkonnosti firem a odvětví na bázi metody EVA – Economic Value Added,* Finance a úvěr- Czech Journal of Economics and Finance, 11-12 2004, roč. 54

[8] DUFFIE, D (1988) *Security Markets- Stochastic Models*, Academic press, Inc.

[9] HULL, J. C. (2000), *Options, Futures, and other Derivatives*. Prentice Hall.

[10] MUSIELA, M., RUTKOWSKI, M. (1997), *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer-Verlag, 48-50.

[11] SICK, G.(1995), „*Real Options*“. In Jarrow, R et all, *Handbooks in OR and MS*, Vol. 9, Elsevier Science B.V., 631-691.

[12] TRIGEORGIS, L. (1998), *Real Options - Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, Harvard University.

[13] ZMEŠKAL, Z. (2001) *Application of the fuzzy - stochastic Methodology to Appraising the Firm Value as a European Call Option*, European Journal of Operational Research, Vol. 135/2, pp 303-310

[14] ZMEŠKAL, Z. (1999) *Možnosti stanovení hodnoty firmy jako bariérové americké call opce*. Sborník Mezinárodní konference In: Ekonomika firiem 1999, Ekonomická univerzita Bratislava, 1999, ISBN 80-225-1212-5

[15] ZMEŠKAL. Z.: (1999) *Fuzzy-stochastický odhad hodnoty firmy jako call opce*. Finance a úvěr, Economia a. s. Praha, 3, 1999, ISSN 0015-1920

[16] ZMEŠKAL, Z. a kol. (2004) *Finanční modely*. 2. upravené vydání Praha: Ekopress Praha, 2004

[17] ZMEŠKAL. Z (2004) *Přístupy k eliminaci finančních rizik na bázi finančních hedgingových strategií*. Finance a Úvěr - Czech Journal of Economics and Finance*,* 2004, roč. 54, (č. 1.-2.), s. 50-63.

[18] ZMEŠKAL. Z (2005) *Approach to Soft Binomial Real Option Model Application (fuzzy - stochastic approach)*, The 12 th Global Finance Conference, Dublin, Irsko

Summary

Determination of projects and companies value with possibility of dynamic multinomial flexibility on the real switch option basis

There is in the paper application of the real options with sequential decisions described on the Bellman optimality principle basis. Principles of valuation, risk-neutral probability approach, switch options, multinomial flexibility models are described and explained. Illustrative example is presented as well. It was verified that generalised flexibility approach reflects suitably decision-making conditions, especially inertia, hysteresis and forward-looking aspects.