

Tvorba portfolia finančních aktiv s využitím metodologie Tracking Error za nejistoty

Jiří Valecký¹

Abstrakt

Příspěvek je věnován aplikaci metodologie Tracking Error za nejistoty. Nejprve je tato metodologie rámcově vysvětlena a poté je navržen model optimalizující strukturu portfolia využívající fuzzy metodologii, jež je rovněž rámcově přiblížena. Navržený model je aplikovaný na reálných datech českého kapitálového trhu. Výsledky jsou interpretovány.

Klíčová slova

Tracking Error, Tracking Error Volatility, fuzzy množina, T-číslo, TR-číslo, princip rozšíření, dekompoziční princip, fuzzy relace, portfolio.

1. Úvod

V posledních letech se nejen v odborné literatuře, ale i v časopisech pro širokou veřejnost², objevují závěry různých empirických studií, že jen stěží lze dosáhnout lepšího výsledku zhodnocení svých úspor prostřednictvím podílových fondů, než jaké nabízí trh prostřednictvím investování do indexových certifikátů³. Tento fakt posiluje i existence vstupních či ročních manažerských poplatků, jež je investor nucen platit správcům podílových fondů za správu svého majetku. Naproti tomu indexový certifikát zaručuje investorovi přesné kopírování vývoje trhu při minimálních nákladech. Tímto způsobem je tak zproštěn povinnosti platit za správu svého majetku přímo a nepřímo za ni platí prostřednictvím participace banky na výnosu⁴ či malým spreadem mezi nákupní a prodejní cenou certifikátu.

Z mnoha zveřejňovaných článků⁵ je však zřejmé, že lze trh překonat, tj. dosáhnout lepšího výnosu než sám trh. V praxi je toto velice obtížné. Má-li být investor úspěšnější, může tohoto dosáhnout především aktivní správou portfolia než pasivním přístupem. Vystávají zde však dodatečné náklady ve formě transakčních nákladů a nákladů na sledování a odhad budoucího vývoje. Tyto náklady podstatně snižují výsledný efekt. Dalším faktorem, jež vysoce ovlivňuje výsledek, je kvalita odhadu budoucího vývoje jednotlivých cenných papírů i celkového trhu. Jsou-li tyto odhady nespolehlivé a málo důvěryhodné, stěží může investor dosáhnout lepšího výsledku než sám trh při nízkém riziku. Tyto odhady mohou být prováděny pomocí různých modelů analyzujících historické časové řady (ARIMA, GARCH, SETAR aj.) či být založeny na zkušenosti finančního manažera. Cílem tohoto článku je snaha o vytvoření takového portfolia, jež by kopírovalo tržní index pomocí „Tracking Error Volatility“ při respektování snížené kvality odhadu budoucího vývoje.

¹ Ing. Jiří Valecký, VŠB-Technická Univerzita Ostrava, Ekonomická fakulta, katedra Financí, Sokolská 33, 701 21 Ostrava 1, e-mail: jiri.valecky.ekf@vsb.cz.

² Např. SVOBODA, M. Certifikát: Jak držet krok s trhy. *Osobní finance*, Únor 2005, č. 2, s. 9 aj.

³ Indexový certifikát přesně zobrazuje vývoj největších světových indexů a jeho hodnota může být kdykoliv přesně odvozena z aktuální hodnoty příslušného indexu.

⁴ Tato participace záleží na typu a druhu nabízeného indexového certifikátu.

⁵ Např. FRAJT, M. Čarování Marka Mobiuse. *Osobní finance*, březen 2005, č. 3, s. 44 aj.

1.1 Tracking error

Jiným východiskem kopírování trhu je oproti indexovým certifikátům metoda „Tracking Error“. Podstatou této metody je vytvoření takového portfolia, které by nejlépe kopírovalo vývoj předem zvoleného benchmarku⁶. Pojmu „Tracking Error“ je rozuměno jako standardní odchylce výnosu portfolia vzhledem k výnosu benchmarku (viz Fabozzi, 2004). Lze tedy tento výraz přeložit jako trasování chyby.

Ve finanční praxi často investor přenechává správu svého majetku manažerovi, jež má za úkol dosáhnout lepšího výnosu než zvolený benchmark. Jorion (2002) poukazuje na nebezpečí optimalizace dle maximálního výnosu bez ohledu na podstupované riziko, tzn. že dodatečné riziko je ignorováno, a to především z toho důvodu, že správce majetku je odměňován provizí na dosaženém výsledku. Roll (1992) k tomu předesílá, že tato optimalizace vede k těžko přijatelnému rozhodnutí, protože výsledné portfolio má vyšší systematické riziko než sám benchmark a není tedy ani optimální. Z těchto důvodů institucionální investoři zavádí limity volatility odchylky portfolia od benchmarku. V literatuře se hovoří o tzv. Tracking Error Volatility (viz Jorion, 2002), kdy se jedná o maximalizaci dodatečného výnosu při očekávané volatilitě TE (viz dále), nebo o Tracking Error Variance (viz Roll, 1992), kdy účelovou funkci představuje volatilita TE při očekávaném rozdílu výnosu portfolia od benchmarku. Obecná formulace úloh pro TE volatility je

Úloha 1

$$\begin{aligned} & \max \bar{R}' \bar{\delta} \\ \text{za podmínek} & \sum_{i=1}^n \delta_i = 0, \end{aligned} \quad (P1)$$

$$\bar{\delta}' V \bar{\delta} = T, \quad (P2)$$

$$(\bar{x}_B + \bar{\delta})' V (\bar{x}_B + \bar{\delta}) = \sigma_p^2, \quad (P3)$$

$$\text{kde} \quad \bar{\delta} = \bar{x} - \bar{x}_B.$$

V účelové funkci je maximalizován dodatečný výnos optimálního portfolia. Dodatečnému výnosu se rozumí jako rozdílu výnosu portfolia od výnosu benchmarku, přitom \bar{R} je vektor výnosů jednotlivých aktiv, $\bar{\delta}$ je vektor rozdílů mezi složením hledaného portfolia \bar{x} a benchmarku \bar{x}_B .

Podmínkou (P1) je stanoveno, že suma všech odchylek $\bar{\delta}$ je rovna nule. Limit volatility odchylky stanovené institucionálním investorem (viz výše) je určen podmínkou (P2), přičemž V je kovarianční matice a T je stanovený limit. Pomocí podmínky (P3) je stanoven požadavek na předem definovanou rizikovost portfolia σ_p^2 a „‘“ značí transpozici.

Roll (1992) definuje úlohu TE variance následovně

Úloha 2

$$\begin{aligned} & \min \bar{\delta}' V \bar{\delta} \\ \text{za podmínek} & \sum_{i=1}^n \delta_i = 0, \end{aligned} \quad (P1)$$

⁶ Benchmark je tzv. měřítkem úspěšnosti jednotlivých (individuálních) investic s úspěšností celkového trhu. Jako benchmark se většinou používá vhodný index; hodnotový vývoj evropských finančních produktů se srovnává s vývojem vůdčího evropského akciového indexu EURO STOXX 50; americké finanční produkty se porovnávají s indexem S&P500 a japonské s indexem Nikkei 225.

$$\delta' \bar{R} = G, \quad (P2)$$

$$\text{kde} \quad \bar{\delta} = \bar{x} - \bar{x}_B.$$

V účelové funkci je minimalizována TE variance, jež byla v Úloze 1 využita jako podmínka pro stanovení limit volatility odchylky vytvářeného portfolia od benchmarku. Podmínka (P1) je analogická podmínce v Úloze 1 a podmínkou (P2) je představován požadavek na předem stanovený dodatečný výnos G .

Jako alternativu limitům volatility odchylky lze použít stanovené pásmo, v němž by se výnos portfolia měl pohybovat. Úlohu 1 lze pak přepsat do tvaru (pro jednoduchost jsou zamezeny krátké prodeje)

Úloha 3

$$\begin{aligned} & \max \bar{R}' \bar{\delta} \\ \text{za podmínek} & \sum_{i=1}^n \delta_i = 0 \end{aligned} \quad (P1)$$

$$(\bar{x}_B + \bar{\delta})' V (\bar{x}_B + \bar{\delta}) = \sigma_p^2 \quad (P2)$$

$$\bar{x} \geq 0, \quad (P3)$$

$$R_p \leq B^H, \quad (P4)$$

$$R_p \geq B^D, \quad (P5)$$

$$\text{kde} \quad \bar{\delta} = \bar{x} - \bar{x}_B, \quad R_p = \bar{R}' \cdot \bar{x}$$

V účelové funkci je maximalizován dodatečný výnos, přičemž \bar{R} je vektor výnosů jednotlivých aktiv, $\bar{\delta}$ je vektor rozdílů mezi složením hledaného portfolia \bar{x} a benchmarku \bar{x}_B .

Podmínky (P1) a (P2) jsou analogické podmínkám Úlohy 1. Krátké prodeje jsou pro zjednodušení řešení zamezeny podmínkou (P3). Pomocí podmínky (P4) a (P5) je stanoveno, že výnos optimálního portfolia se pohybuje v očekávaném výnosovém pásmu. Toto pásmo je předem stanoveno na základě očekávaného výnosu benchmarku. Podmínkou (P4) je určena horní mez B^H výnosu portfolia a podmínkou (P5) dolní mez B^D .

2. Fuzzy metodologie

Pro zohlednění snížené kvality odhadu budoucího vývoje byla zvolena fuzzy metodologie. Nejprve je nezbytné vysvětlit nejzákladnější pojmy a pravidla: (1) fuzzy množina, (2) lineární T-číslo, (3) TR-číslo, (4) ε -řez, (5) princip rozšíření, (6) dekompoziční princip a (7) fuzzy relace.

Definice 1. Fuzzy množina (označována vlnovkou) je obecně uspořádaná množina dvojic a je definována funkcí příslušnosti (μ) jako zobrazení prostoru E^n (Euklidovský n -rozměrný prostor, $n > 1$) v intervalu $[0;1]$ splňující podmínky normality, spojitosti, konvexnosti a omezení nosiče $\text{supp } \tilde{s}$, viz Novák (1989). Píšeme $\tilde{s} \equiv \mu_{\tilde{s}}(x)$, kde \tilde{s} je fuzzy množina, x je vektor, $x \in X \subset E^n$ a $\mu_{\tilde{s}}(x)$ je funkce příslušnosti.

Definice 2. Fuzzy množina je lineárním fuzzy T-číslem, splňuje-li podmínky z Definice 1 a je-li definován funkcí příslušnosti $\mu_{\tilde{s}}$:

$$\tilde{s} \equiv \mu_{\tilde{s}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pro } x \leq s^L - s^\alpha; \quad \phi(x) \text{ pro } s^L - s^\alpha < x < s^\alpha; \\ 1 & \text{pro } s^L \leq x \leq s^U; \quad \psi(x) \text{ pro } s^U < x < s^U + s^\beta; \\ 0 & \text{pro } x \geq s^U + s^\beta \end{array} \right\},$$

kde funkce $\phi(x) = \frac{x - (s^L - s^\alpha)}{s^\alpha}$, $\psi(x) = \frac{(s^U + s^\beta) - x}{s^\beta}$ jsou reálné spojité lineární funkce.

Lineární fuzzy T-číslo můžeme také označovat jako čtveřici $\tilde{s} = (s^L, s^U, s^\alpha, s^\beta)$, kde $s^L \leq s^U$; $s^U, s^L, s^\alpha, s^\beta \in E^1$; $s^\alpha, s^\beta \geq 0$.

Definice 3. TR-číslo (triangular) nebo někdy MT-číslo (middle) je takové číslo, kde $s^L = s^U$, značeno $\tilde{s}^{TR} = (s; s; s^\alpha; s^\beta) = (s^M; s^\alpha; s^\beta)$ a definováno

$$\tilde{s}^{TR} \equiv \mu_{\tilde{s}^{TR}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pro } x \leq s^M - s^\alpha; \quad \phi(x) \text{ pro } s^M - s^\alpha < x < s^M; \\ \psi(x) & \text{pro } s^M \leq x \leq s^M + s^\beta; \\ 0 & \text{pro } x \geq s^M + s^\beta \end{array} \right\}$$

Definice 4. ε -řez fuzzy množiny \tilde{s} , značeno \tilde{s}^ε , je definován jako

$$\tilde{s}^\varepsilon = \{x \in E^n; \mu_{\tilde{s}}(x) \geq \varepsilon\} = [-s^\varepsilon, +s^\varepsilon],$$

kde $-s^\varepsilon = \inf\{x \in E^n; \mu_{\tilde{s}}(x) \geq \varepsilon\}$, $+s^\varepsilon = \max\{x \in E^n; \mu_{\tilde{s}}(x) \geq \varepsilon\}$.

S fuzzy číslu lze provádět všechny nejzákladnější matematické operace (součet, rozdíl, součin...). Nejrozšířenějším způsobem provádění operací s fuzzy množinami je aplikace tzv. principu rozšíření (*extension principle*), který je definován na základě sup min kompozice, viz Zadeh (1973). Vztah mezi fuzzy množinami $\tilde{s} = f(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n)$ lze definovat následovně.

Definice 5. Princip rozšíření je odvozen pomocí sestavení sup min kompozice mezi fuzzy množinami $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n$ a $\tilde{s} = f(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n)$. Necht' $f: E^n \rightarrow E^1$, pak funkce příslušnosti fuzzy množiny $\tilde{s} = f(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n)$ je definována

$$\mu_{\tilde{s}}(y) \equiv \tilde{s} = \sup_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ y = f(x_1, \dots, x_n)}} \min[\mu_{\tilde{r}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{r}_n}(x_n)], \quad x_i, y \in E^1.$$

Definice 6. Pokud není možné získat hodnotu výsledné fuzzy množiny analyticky, je možné využít dekompoziční princip pomocí ε -řezů:

$$\mu_{\tilde{s}}(y) \equiv \tilde{s} = f[\mu_{\tilde{r}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{r}_n}(x_n)], \quad \text{kde } x_i, y \in E^1 \text{ je definováno}$$

$$\mu_{\tilde{s}}(y) \equiv \tilde{s}(x) = \bigcup_{\varepsilon} \varepsilon[-s^\varepsilon(x), +s^\varepsilon(x)], \quad \text{pro jakékoli } x \in E^1 \text{ a } \varepsilon \in [0, 1],$$

kde $-s^\varepsilon(x) = \min_{x \in \tilde{s}^\varepsilon \subset E^n} f(x)$, $+s^\varepsilon(x) = \max_{x \in \tilde{s}^\varepsilon \subset E^n} f(x)$ a $\tilde{s}^\varepsilon = [-s^\varepsilon(x), +s^\varepsilon(x)]$ je ε -řez funkce

$$\varepsilon[-s^\varepsilon(x), +s^\varepsilon(x)] = \begin{cases} \varepsilon & \text{jestliže } x \in [-s^\varepsilon, +s^\varepsilon] \\ 0 & \text{jestliže } x \in [-s^\varepsilon, +s^\varepsilon] \end{cases}.$$

Nad lineárními T-čísly lze definovat aproximativní operace, viz Dubois (1980).

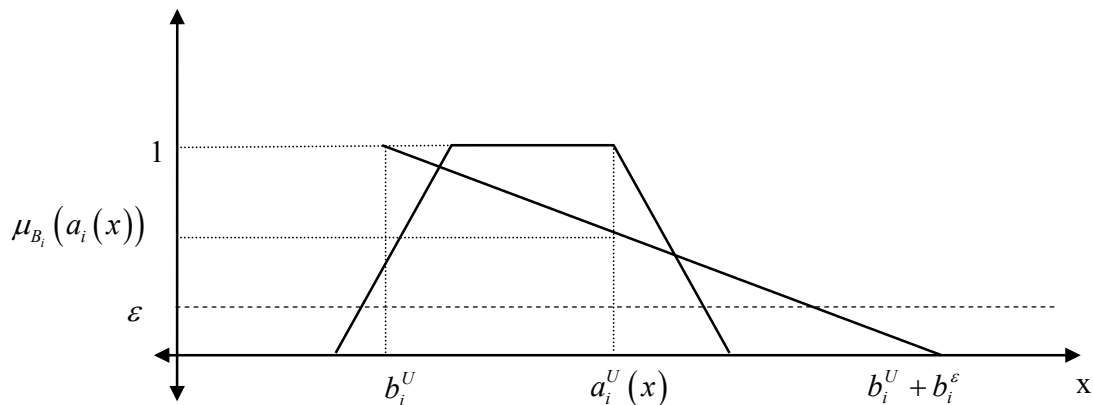
Definice 7. Existují dvě kategorie binárních relací mezi fuzzy množinami (viz Zmeškal 2004): binární ostrá relace (binary crisp relation) $R(\tilde{s}; \tilde{r}) = \{0; 1\}$ a binární fuzzy relace $R(\tilde{s}; \tilde{r}) = [0; 1]$.

Mějme fuzzy binární relaci $\tilde{A}_i(x) \tilde{\leq}_R \tilde{B}_i$, kde $\tilde{A}_i(x) = (a_i^L(x); a_i^U(x); a_i^\alpha(x); a_i^\beta(x))$, $\tilde{B}_i = (b_i^L; b_i^U; b_i^\alpha; b_i^\beta)$ jsou lineární T- čísla, pak tuto fuzzy binární relaci lze přepsat do tvaru ostré lineární relace, viz Rommelfanger (1989); Slowinski (1998)

$$\tilde{A}_i(x) \tilde{\leq}_R \tilde{B}_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_i^U(x) + a_i^\varepsilon(x) \leq b_i^U + b_i^\varepsilon \\ \mu_i(x) = \mu_B(a_i^U(x)) \rightarrow \max \end{cases}$$

R udává tzv. pesimistický index vyjadřující uspokojení splnění fuzzy podmínky, viz Slowinski (1986).

Obr.č. 1: Fuzzy binární relace



Definice 8. Je zřejmé, že kombinací fuzzy čísel a normálních ostrých čísel lze dospět k různým variantám úloh lineárního programování. Obecný tvar fuzzy lineárního programování je znázorněn následovně, viz Slowinski (1998)

$$\tilde{C}_1 x_1 \oplus \tilde{C}_2 x_2 \oplus \dots \oplus \tilde{C}_n x_n \rightarrow \max$$

za podmínek

$$\tilde{A}_{i1} x_1 \oplus \tilde{A}_{i2} x_2 \oplus \dots \oplus \tilde{A}_{in} x_n \tilde{\leq} \tilde{B}_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0,$$

kde \tilde{C}_j , \tilde{A}_{ij} a \tilde{B}_i jsou fuzzy čísla a $\tilde{\leq}$ je fuzzy relace.

3. Formulace fuzzy-stochastického modelu

V následující části je zkonstruován model vycházející z metody „Tracking Error“, jež zohledňuje nejistotu odhadu tak, že všechny očekávané základní charakteristiky jsou reprezentovány určitým fuzzy číslem. Jedná se o očekávaný výnos, rozptyl a kovariance mezi jednotlivými aktivy. Tento model vychází z Úlohy 3 a úlohu fuzzy programování lze zapsat následovně

Úloha 4

$$\begin{aligned} & \max \tilde{R}' \vec{\delta} \\ \text{za podmíněk} & \sum_{i=1}^n \delta_i = 0, \end{aligned} \quad (\text{P1})$$

$$(\vec{x}_B + \vec{\delta})' \tilde{V} (\vec{x}_B + \vec{\delta}) = \sigma_p^2, \quad (\text{P2})$$

$$\vec{x} \geq 0, \quad (\text{P3})$$

$$\tilde{R}_p \leq \tilde{B}, \quad (\text{P4})$$

$$\tilde{R}_p \geq \tilde{B}, \quad (\text{P5})$$

$$\text{kde} \quad \vec{\delta} = \vec{x} - \vec{x}_B, \quad \tilde{R}_p = \tilde{R}' \cdot \vec{x}.$$

Účelovou funkcí je opět maximalizován dodatečný výnos hledaného portfolia, přičemž \tilde{R} je fuzzy vektor očekávaných výnosů jednotlivých aktiv a $\vec{\delta}$ je vektor rozdílů mezi složením hledaného portfolia \vec{x} a benchmarku \vec{x}_B .

Podmínky (P1), (P2) a (P3) jsou analogické Úloze 3. \tilde{V} je fuzzy očekávaná kovarianční matice. Pomocí podmínky (P4) a (P5) je stanoveno, že výnos optimálního portfolia se pohybuje v předem určeném výnosovém pásmu, jež je charakterizováno fuzzy číslem \tilde{B} , viz Obr.č. 2.

Podmínky (P4) a (P5) mohou být zapsány i pomocí fuzzy binárních relací a Úloha 4 přepsána

Úloha 5

$$\begin{aligned} & \max \tilde{R}' \vec{\delta} \\ \text{za podmíněk} & \sum_{i=1}^n \delta_i = 0, \end{aligned} \quad (\text{P1})$$

$$(\vec{x}_B + \vec{\delta})' \tilde{V} (\vec{x}_B + \vec{\delta}) = \sigma_p^2, \quad (\text{P2})$$

$$\vec{x} \geq 0, \quad (\text{P3})$$

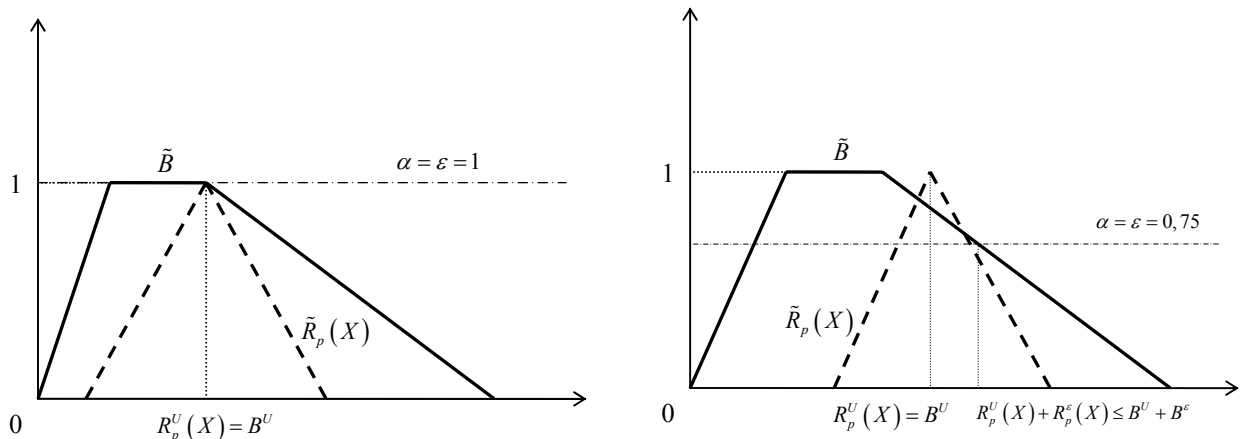
$$\tilde{R}_p \preceq_{\alpha} \tilde{B}, \quad (\text{P4})$$

$$\tilde{R}_p \succeq_{\alpha} \tilde{B}, \quad (\text{P5})$$

$$\text{kde} \quad \vec{\delta} = \vec{x} - \vec{x}_B, \quad \tilde{R}_p = \tilde{R}' \cdot \vec{x}.$$

Na Obr.č. 2 vlevo je pak znázorněna binární relace z podmínky (P4) a fuzzy binární relace (P5) vpravo. Tato fuzzy binární relace závisí na hodnotě α , jež udává tzv. pesimistický index a jež je rovna předem určené konstantě z intervalu 0 až 1. Vpravo je fuzzy binární relace pro $\alpha = 0,75$ a nalevo pro $\alpha = 1$. Relace (P4) z Úlohy 4 je tedy speciální případ fuzzy binární relace (P4) Úlohy 5 pro $\alpha = 1$.

Obr.č. 2: Binární relace



Optimalizační Úlohu 5 lze řešit pomocí ε -řezů, přičemž dostáváme

Úloha 6

$$\max(\min) D = {}^+D^\varepsilon ({}^-D^\varepsilon) \text{ pro } \varepsilon \in [0;1],$$

$$\text{za podmíněk} \quad \sum_{i=1}^n \delta_i = 0, \quad (\text{P1})$$

$$(\bar{x}_B + \bar{\delta})' V (\bar{x}_B + \bar{\delta}) = \sigma_p^2, \quad (\text{P2})$$

$$\bar{x} \geq 0, \quad (\text{P3})$$

$$V \in [{}^-V^\varepsilon; {}^+V^\varepsilon], \quad (\text{P4})$$

$$\bar{R} \in [{}^-R^\varepsilon; {}^+R^\varepsilon], \quad (\text{P5})$$

$$R_p \leq {}^+B^\alpha, \quad (\text{P6})$$

$$R_p \geq {}^-B^\alpha, \quad (\text{P7})$$

$$\text{kde} \quad D = \bar{R}' \bar{\delta}, \quad R_p = \bar{R}' \bar{x}, \quad \alpha = k \text{ pro } k \in [0;1].$$

V účelové funkci je maximalizován dodatečný výnos hledaného portfolia, přičemž \bar{R} je fuzzy vektor očekávaných výnosů jednotlivých aktiv a $\bar{\delta}$ je vektor rozdílů mezi složením hledaného portfolia \bar{x} a benchmarku \bar{x}_B .

Podmínky (P1), (P2) a (P3) jsou analogické podmínkách Úlohy 3. Podmínkami (P4) a (P5) je určeno, že kovarianční matice a vektor výnosů jednotlivých aktiv náleží do intervalů příslušných ε -řezů. Fuzzy relací z podmínky (P6) je stanoven požadavek na fuzzy výnos optimálního portfolia, jež má být nižší než horní hranice stanoveného výnosového pásma pro $\alpha = k$, kde k je předem určená konstanta patřící do intervalu $[0;1]$ a kde ${}^+B^\alpha$ je horní hodnota α -řezu. V podmínce (P7) je zapsána fuzzy relace pro spodní hranici tohoto pásma pro stejnou hodnotu $\alpha = k$, kde ${}^-B^\alpha$ je spodní hodnota α -řezu.

4. Ověření modelu

V následující části jsou nejprve zadány vstupní parametry potřebné pro řešení Úlohy 6, podle níž je získána struktura optimálního portfolia. V další části je provedeno testování a porovnání výkonnosti tohoto portfolia se skutečným vývojem.

4.1 Výběr optimálního portfolia dle fuzzy-stochastického modelu

S cílem maximalizovat dodatečný výnos D byla provedena optimalizace struktury portfolia dle fuzzy-stochastického modelu Úlohy 5. Tuto úlohu lze zapsat rovněž pomocí ε -řezů, přičemž dostáváme Úlohu 6. Vstupními daty je vektor fuzzy výnosů \tilde{R} , fuzzy kovarianční matice \tilde{V} , výnosové pásmo \tilde{B} , požadovaný rozptyl výsledného portfolia σ_p^2 a koeficient α .

Výběr je proveden z 13 finančních aktiv v podobě cenných papírů českého kapitálového trhu. K dispozici jsou časové řady výnosů jednotlivých cenných papírů od listopadu 2002 do ledna 2005. Tyto řady byly rozděleny do dvou kratších časových řad (od listopadu 2002 do července 2004 - 21 měsíců; od srpna 2004 do ledna 2005 - 6 měsíců). V Tab.č. 1 jsou uvedeny výnosy a směrodatné odchylky těchto finančních aktiv za období prvé, včetně zvoleného benchmarku představovaného indexem PX-50 (kovarianční matice je uvedena v Příloze 1). Z těchto hodnot byl získán fuzzy vektor výnosů \tilde{R} a fuzzy kovarianční matice \tilde{V} v podobě fuzzy TR-čísel uvedených v Příloze 1 a 2. Provedená transformace je pouze intuitivní pro demonstraci přístupu. Stanovené pásmo \tilde{B} přípustného výnosu portfolia R_p je definováno jako lineární T-číslo a charakterizováno čtveřicí (0,02412; 0,03412; 0,02519; 0,02519). Pesimistický index α je stanoven ve výši 0,75 a požadovaná rizikovost portfolia byla stanovena jeho rozptylem σ_p^2 na úrovni 0,00175.

Cenný papír	1.období (list 02 - črvc 04)	
	výnos R	odchylka σ
ČEZ	0,033	0,063
PARAMO	0,028	0,077
ČP	0,045	0,073
ERSTE	0,038	0,042
KB	0,026	0,063
PM ČR	0,011	0,073
SC ENERG.	0,021	0,042
SOKOLOVSKÁ	0,049	0,095
SSZ	0,037	0,060
STC ENERG.	0,011	0,069
SV DOLY	0,058	0,099
TELECOM	0,014	0,107
UNIPETROL	0,035	0,067
PX-50	0,028	0,044

Tab.č. 1: Základní charakteristiky cenných papírů za 1. období

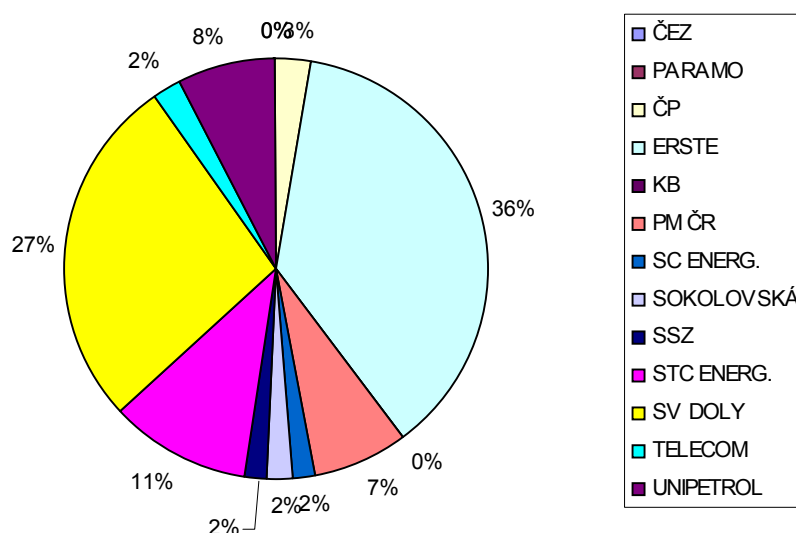
Řešením Úlohy 6, jež je převedenou Úlohou 5 pomocí ε -řezů, je získána následující struktura optimálního portfolia (vektor \bar{x}), viz Tab.č. 2.

Cenný papír	x_i
ČEZ	0
PARAMO	0
ČP	0,0265
ERSTE	0,3718
KB	0
PM ČR	0,0721
SC ENERG.	0,0161
SOKOLOVSKÁ	0,0198
SSZ	0,0158
STC ENERG.	0,1089
SV DOLY	0,2709
TELECOM	0,0230
UNIPETROL	0,0751

Tab.č. 2: Výsledná struktura portfolia

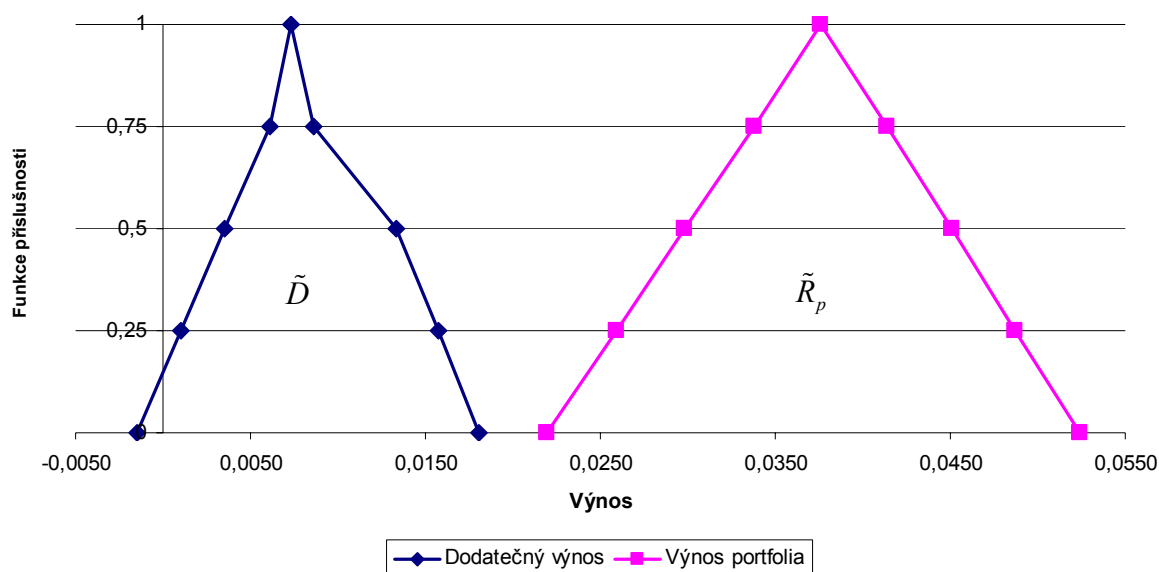
Ve struktuře portfolia se objevily téměř všechny uvažované akcie s výjimkou akcií ČEZu, Parama a Komerční banky. Výsledné podíly jednotlivých aktiv jsou graficky zobrazeny na Obr.č. 3.

Obr.č. 3: Struktura portfolia



Na Obr.č. 4 je graficky znázorněn výsledek účelové funkce Úlohy 6 maximalizující dodatečný fuzzy výnos portfolia \tilde{D} spolu s celkovým fuzzy výnosem \tilde{R}_p . Hodnoty dodatečného výnosu D nabývají hodnot od -0,0015 do 0,0181 pro ε -řez roven 0 a od 0,0061 do 0,0086 pro $\varepsilon = 0,75$ a výnos portfolia R_p od 0,0220 do 0,0524 pro $\varepsilon = 0$ a pro $\varepsilon = 0,75$ od 0,0338 do 0,0414.

Obr.č. 4: Fuzzy dodatečný výnos a fuzzy výnos portfolia



4.2 Komparace výkonnosti portfolia dle f-s modelu a skutečného vývoje

V Tab.č. 3 je porovnán výnos a směrodatná odchylka vytvořeného portfolia. V téže tabulce jsou tyto základní charakteristiky spočteny i za druhé období při zachování struktury portfolia získaného za pomoci období prvního.

Model (index)	Výnos R_p		Směrodatná odchylka σ_p	
	1. období	2. období	1. období	2. období
Portfolio	0,038	0,031	0,044	0,072
PX-50	0,028	0,045	0,044	0,036

Tab.č. 3: Charakteristiky pro obě období

Tvorba portfolia na historických datech přinesla velmi dobré výsledky. Vytvořené portfolio se vyznačuje vyšším výnosem a stejnou směrodatnou odchylkou jako zvolený benchmark PX-50, což je vnímáno příznivě. Optimalizací fuzzy-stochastického modelu bylo dosaženo vyšší výkonnosti než jaká byla výkonnost zvoleného benchmarku.

Na druhém období je zjišťováno, jak by si vytvořené portfolio vedlo při pasivní správě, a to v investičním horizontu 6 měsíců. Zhodnocení je nižší než je tomu u benchmarku a při dvojnásobné směrodatné odchylce. Bylo tedy dosaženo nižší výkonnosti, a to pravděpodobně díky nespolehlivému odhadu budoucího vývoje cen. V Tab.č. 4 je porovnána předpověď se skutečnými hodnotami.

CP/výnos	Předpověď			Skutečnost
	$s^M_{-s\alpha}$	s^M	$s^{M+s\beta}$	
ČEZ	0,0303	0,0327	0,0352	0,1044
PARAMO	-0,0079	0,0277	0,0632	0,1111
ČP	0,0140	0,0448	0,0756	0,0591
ERSTE	0,0332	0,0379	0,0425	0,0249
KB	0,0239	0,0258	0,0277	0,0194
PM ČR	0,0104	0,0113	0,0122	0,0101
SC ENERG.	0,0037	0,0207	0,0376	0,0225
SOKOLOVSKÁ	0,0252	0,0488	0,0724	0,0410
SSZ	-0,0383	0,0365	0,0456	0,0662
STC ENERG.	-0,0249	0,0113	0,0476	0,0352
SV DOLY	0,0317	0,0575	0,0834	0,0339
TELECOM	0,0133	0,0144	0,0156	0,0262
UNIPETROL	0,0319	0,0347	0,0375	0,0446

Tab.č. 4: Očekávané a skutečné výnosy CP

Z údajů uvedených v Tab.č. 4 je zřejmé, že odhady očekávané výnosu byly u některých cenných papírů zcela mylné, především u akcií ČEZu, Parama nebo také SSZ. Vždy jsou porovnávány hodnoty ve sloupci „Skutečnost“ a „Předpověď – s^M “. Výsledek je samozřejmě závislý také na předpovědi kovariancí mezi jednotlivými akciemi. Neúspěch lze tedy vysvětlit především špatným forecastingem vývoje marginálních (střední hodnota, směrodatná odchylka, rozptyl) i simultánních (kovariance) charakteristik jednotlivých cenných papírů. Pro zlepšení výsledku modelu je možné rozmazání očekávaných charakteristik do fuzzy čísel nějakým způsobem systematizovat např. podle stupně kvality a spolehlivosti odhadu. Čím méně spolehlivý odhad, tím větším spreadem fuzzy čísla⁷ by daný odhad mohl být charakterizován.

5. Závěr

Cílem příspěvku byla konstrukce modelu založeného na metodologii „Tracking Error“, jehož účelem by byla tvorba optimální struktury portfolia pro předem zvolený krátkodobý investiční horizont. Odhad budoucího vývoje byl proveden intuitivně pomocí fuzzy množin. Dále bylo zjišťováno, zda je možné tímto modelem získat portfolio s vyšší výkonností než jakou výkonnost dosahuje zvolený benchmark PX-50.

Na základě odhadů očekávaného vývoje charakteristik cenných papírů v podobě fuzzy TR-čísel bylo sestaveno takové portfolio, které mělo lepší performanci než zvolený benchmark. Toto rozhodnutí však bylo tvořeno „ex post“ a skutečného výnosu dosaženo nebylo. Struktura portfolia byla ponechána a na druhém období porovnána jeho výkonnost se skutečnými vývojem hodnoty benchmarku. Z výsledků je patrné, že model ve srovnání se skutečným vývojem nebyl úspěšný. Bylo dosaženo nižšího výnosu než u benchmarku při téměř dvojnásobné směrodatné odchylce.

Tato výkonnost vytvořeného portfolia závisí především na vstupních datech. Rozhodující je však kvalita odhadu budoucího vývoje cen akcií. Při porovnání očekávaných a skutečných hodnot se ukázalo, že v některých případech byl odhad naprosto mylný. Této spolehlivosti by měl být podřízen proces fuzzyfikace vstupních hodnot modelu. Tedy za předpokladu kvalitního forecastingu vývoje charakteristik aktiv a systematické fuzzyfikace vstupních dat by investor mohl dosáhnout lepších výsledků.

⁷ Viz CARLSSON, C., FULLÉR, R., MAJLENDER, P.: A possibilistic approach selecting portfolios with highest utility score. *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, říjen 2001.

Literatura

- [1] FABOZZI, F. J., FOCARDI, S. M. *The Mathematics of Financial Modeling & Investment management*. New Persey: Wiley, 2004. ISBN 0-471-46599-2
- [2] INUIGUCHI, M., RAMÍK, J., TANINO, T., VLACH, M. Satisficing solutions and duality in interval and fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier 2003, č. 135, s. 151-177.
- [3] JORION, P. Portfolio Optimization with Constraints on Tracking Error. *Financial Analysts Journal* 2002.
- [4] RAMÍK, J., VLACH, M. Pareto-optimality of compromise decisions. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier 2002, č. 129, s. 119-127.
- [5] ROLL, R. A Mean/Variance Analysis of Tracking Error. *The Journal of Portfolio Management*, Summer 1992, č. 18, s. 13-22.
- [6] SHARPE, W. F., ALEXANDER, G. J. *Investice*. 4. vyd. Praha: Victoria Publishing, a. s., 1994. ISBN 80-85605-47-3
- [7] SLOWINSKI, R. A multi-criteria fuzzy linear programming method for water supply system development planning, *Fuzzy Sets and Systems* 1986, č. 19, s. 217-237.
- [8] SLOWINSKI, R. *Fuzzy sets in decision analysis, operations research and statistics*. Boston – Dordrecht – London: Kluwer Academic Publishers, 1998. ISBN 0-7923-8112-2.
- [9] STUCCHI, P. Dominant Minimum Tracking Error Portfolio with Additional Constraints on Risk. *IME 2004*, June 2004.
- [10] ZADEH, L. A. Outlook of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. Syst. Man. Hybern.*, 1973.
- [11] ZIMMERMANN, H. J. *Fuzzy set theory*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. ISBN 0-7923-7435-5.
- [12] ZMEŠKAL, Z. *Finanční modely*. Praha: Ekopress, 2004. ISBN 80-86119-87-4.
- [13] ZMEŠKAL, Z. Optimization Financial Planning Model under Soft Conditions, In: DLUHOŠOVÁ, D. a kol. *Nové přístupy a finanční nástroje ve finančním rozhodování*. Ostrava: VŠB-TU, 2004, s. 547-561. ISBN 80-248-0669-X.
- [14] ZMEŠKAL, Z. Value at risk methodology under soft conditions approach (fuzzy-stochastic approach). *European Journal of Operational Research*, Elsevier 2003, č. 161, s. 337-347.

Summary

The main goal of this paper is application of Tracking Error under uncertainty. Firstly is explained the fuzzy methodology and methodology of T.E. in general features and thereafter optimization model is created. Suggested model is solved by using real data of Czech capital market. Results are interpreted.

Priloha č. 1: Kovarianční matice
a) historická kovarianční matice

ČEZ	PARAMO	ČP	ERSTE	KB	PM ČR	SC ENER. SOKOLOVSKÁ	SSZ	STC ENER.	SV DOLY	TELECOM	UNIPETROL
0,003925	-0,00146	0,001483	0,000789	0,002015	0,002291	0,000945	0,001215	0,000734	0,001024	0,004065	-4,35E-06
-0,001462	0,00589	-0,001342	-6,32E-05	-0,0019	-0,000178	-0,000153	0,000822	0,001659	-0,000922	-0,000555	0,001788
0,001483	-0,00134	0,005373	0,000896	0,000586	0,001209	0,001191	0,002773	0,000917	0,002796	0,001558	0,000293
0,000789	-6,3E-05	0,000896	0,001799	8,65E-05	0,001448	7,29E-05	0,001624	-0,000261	0,00112	-0,001106	9,11E-05
0,002015	-0,0019	0,000586	8,65E-05	0,003944	0,000883	-0,000331	-1,41E-05	0,000267	-0,000255	0,002833	-0,002318
0,002291	-0,00018	0,001209	0,001448	0,000883	0,005294	-0,000128	-0,001347	-0,000965	-0,000159	0,000849	-0,000849
0,000945	-0,00015	0,001191	7,29E-05	-0,000331	-0,000128	0,001763	0,001751	0,000537	0,001537	0,000887	0,001527
0,001215	0,000822	0,002773	0,001624	-1,41E-05	-0,001347	0,001751	0,008976	0,00354	0,004183	0,002253	0,002106
0,000734	0,001659	0,000917	-0,000261	0,000267	-0,000965	0,000537	0,00354	0,003558	0,000702	0,002609	0,000192
0,001024	-0,00092	0,002796	0,00112	-0,000255	-0,000159	0,001537	0,004183	0,000702	0,00474	-0,000227	0,001284
-0,001066	0,002465	0,002331	0,001048	-0,000656	-0,000196	-1,98E-05	0,004316	0,003022	0,000786	-0,00076	0,001098
0,004065	-0,00055	0,001558	-0,001106	0,002833	0,000849	0,000887	0,002253	0,002609	-0,000227	0,011349	0,000323
-4,35E-06	0,001788	0,000293	9,11E-05	-0,002318	-0,000849	0,001527	0,002106	0,000192	0,001284	0,001098	0,004469

b) očekávaná kovarianční matice v podobě fuzzy
TR-čísel ($s^M; s^\alpha; s^\beta$)

ČEZ	PARAMO	ČP	ERSTE	KB	PM ČR	SC ENER. SOKOLOVSKÁ	SSZ	STC ENER.	SV DOLY	TELECOM	UNIPETROL
0,003925	-0,00146	0,001483	0,000789	0,002015	0,002291	0,000945	0,001215	0,000734	0,001024	0,004065	-4,35E-06
-0,001462	0,00589	-0,001342	-6,32E-05	-0,0019	-0,000178	-0,000153	0,000822	0,001659	-0,000922	-0,000555	0,001788
0,001483	-0,00134	0,005373	0,000896	0,000586	0,001209	0,001191	0,002773	0,000917	0,002796	0,001558	0,000293
0,000789	-6,3E-05	0,000896	0,001799	8,65E-05	0,001448	7,29E-05	0,001624	-0,000261	0,00112	-0,001106	9,11E-05
0,002015	-0,0019	0,000586	8,65E-05	0,003944	0,000883	-0,000331	-1,41E-05	0,000267	-0,000255	0,002833	-0,002318
0,002291	-0,00018	0,001209	0,001448	0,000883	0,005294	-0,000128	-0,001347	-0,000965	-0,000159	0,000849	-0,000849
0,000945	-0,00015	0,001191	7,29E-05	-0,000331	-0,000128	0,001763	0,001751	0,000537	0,001537	0,000887	0,001527
0,001215	0,000822	0,002773	0,001624	-1,41E-05	-0,001347	0,001751	0,008976	0,00354	0,004183	0,002253	0,002106
0,000734	0,001659	0,000917	-0,000261	0,000267	-0,000965	0,000537	0,00354	0,003558	0,000702	0,002609	0,000192
0,001024	-0,00092	0,002796	0,00112	-0,000255	-0,000159	0,001537	0,004183	0,000702	0,00474	0,000786	0,001284
-0,001066	0,002465	0,002331	0,001048	-0,000656	-0,000196	-1,98E-05	0,004316	0,003022	0,000786	0,00974	0,001098
0,004065	-0,00055	0,001558	-0,001106	0,002833	0,000849	0,000887	0,002253	0,002609	-0,000227	0,011349	0,000323
-4,35E-06	0,001788	0,000293	9,11E-05	-0,002318	-0,000849	0,001527	0,002106	0,000192	0,001284	0,001098	0,004469

	ČEZ	PARAMO	ČP	ERSTE	KB	PM ČR	SC ENERG. SOKOLOVSKÝ	SSZ	STC ENERG.	SV DOLY	TELECOM	UNIPETROL
ČEZ	0,003324	-0,00342	-0,002462	-0,000726	-0,000544	0,001175	-0,000478	-2,12E-05	-0,001876	-0,000154	0,001947	-0,000932
PARAMO	-0,003418	0,004343	-0,003073	-0,002952	-0,003208	-0,000456	-0,00143	0,000395	-0,001863	-0,004628	-0,000267	-0,003088
ČP	-0,002462	-0,00307	0,000622	-0,000798	-0,000929	-0,000613	-0,00322	0,000719	-0,000184	0,002125	-0,001655	-0,003152
ERSTE	-0,000726	-0,00295	-0,000798	-0,001244	-0,000847	-0,002321	-0,002815	-0,000853	-0,000493	-0,000956	-8,49E-05	1,41E-07
KB	-0,000544	-0,00321	-0,000929	-0,000847	0,002195	-9,14E-05	-0,002938	-0,000636	0,000184	-0,000542	-0,000828	0,001304
PM ČR	0,001175	-0,00046	-0,000613	-0,002321	-9,14E-05	0,005149	-0,000354	-0,003026	-0,002274	-0,002441	-0,000664	-0,004225
SC ENERG.	-0,000478	-0,00143	-0,00322	-0,002815	-0,002938	-0,000354	0,00176	0,000109	-0,000563	0,001241	-0,005691	3,09E-05
SOKOLOVSKÁ	-2,12E-05	0,000395	0,000719	-0,000853	-0,000636	-0,003026	0,000109	0,008118	0,001841	0,002624	0,001812	0,001445
SSZ	-0,001876	-0,00186	-0,000184	-0,000493	0,000184	-0,002274	-0,000563	0,001841	0,001952	-0,00145	0,00126	0,001313
STC ENERG.	-0,000154	-0,00463	0,002125	-0,000956	-0,000542	-0,002441	0,001241	0,002624	-0,00145	0,003577	-0,001879	-0,001673
SV DOLY	-0,001947	-0,00027	-0,001655	-8,49E-05	-0,000828	-0,000664	-0,005691	0,001812	0,00126	-0,001879	0,009365	-0,001811
TELECOM	0,001623	-0,00309	0,00098	-0,003718	0,001304	-0,00072	3,09E-05	0,001445	0,001313	-0,001673	-0,001811	0,009199
UNIPETROL	-0,000932	-0,00115	-0,003152	1,41E-07	-0,005026	-0,004225	0,00105	0,001816	-0,003517	0,001199	-0,000216	-0,001492

	ČEZ	PARAMO	ČP	ERSTE	KB	PM ČR	SC ENERG. SOKOLOVSKÝ	SSZ	STC ENERG.	SV DOLY	TELECOM	UNIPETROL
ČEZ	0,003324	-0,00342	-0,002462	-0,000726	-0,000544	0,001175	-0,000478	-2,12E-05	-0,001876	-0,000154	0,001947	-0,000932
PARAMO	-0,003418	0,004343	-0,003073	-0,002952	-0,003208	-0,000456	-0,00143	0,000395	-0,001863	-0,004628	-0,000267	-0,003088
ČP	-0,002462	-0,00307	0,000622	-0,000798	-0,000929	-0,000613	-0,00322	0,000719	-0,000184	0,002125	-0,001655	-0,003152
ERSTE	-0,000726	-0,00295	-0,000798	-0,001244	-0,000847	-0,002321	-0,002815	-0,000853	-0,000493	-0,000956	-8,49E-05	1,41E-07
KB	-0,000544	-0,00321	-0,000929	-0,000847	0,002195	-9,14E-05	-0,002938	-0,000636	0,000184	-0,000542	-0,000828	0,001304
PM ČR	0,001175	-0,00046	-0,000613	-0,002321	-9,14E-05	0,005149	-0,000354	-0,003026	-0,002274	-0,002441	-0,000664	-0,004225
SC ENERG.	-0,000478	-0,00143	-0,00322	-0,002815	-0,002938	-0,000354	0,00176	0,000109	-0,000563	0,001241	-0,005691	3,09E-05
SOKOLOVSKÁ	-2,12E-05	0,000395	0,000719	-0,000853	-0,000636	-0,003026	0,000109	0,008118	0,001841	0,002624	0,001812	0,001445
SSZ	-0,001876	-0,00186	-0,000184	-0,000493	0,000184	-0,002274	-0,000563	0,001841	0,001952	-0,00145	0,00126	0,001313
STC ENERG.	-0,000154	-0,00463	0,002125	-0,000956	-0,000542	-0,002441	0,001241	0,002624	-0,00145	0,003577	-0,001879	-0,001673
SV DOLY	-0,001947	-0,00027	-0,001655	-8,49E-05	-0,000828	-0,000664	-0,005691	0,001812	0,00126	-0,001879	0,009365	-0,001811
TELECOM	0,001623	-0,00309	0,00098	-0,003718	0,001304	-0,00072	3,09E-05	0,001445	0,001313	-0,001673	-0,001811	0,009199
UNIPETROL	-0,000932	-0,00115	-0,003152	1,41E-07	-0,005026	-0,004225	0,00105	0,001816	-0,003517	0,001199	-0,000216	-0,001492

Příloha č. 2: Očekávaný výnos jednotlivých cenných papírů v podobě fuzzy TR-čísel

CP/výnos	$s^M - s^{Delta}$	s^M	$s^M + s^{Delta}$
ČEZ	0,0303	0,0327	0,0352
PARAMO	-0,0079	0,0277	0,0632
ČP	0,0140	0,0448	0,0756
ERSTE	0,0332	0,0379	0,0425
KB	0,0239	0,0258	0,0277
PM ČR	0,0104	0,0113	0,0122
SC ENERG.	0,0037	0,0207	0,0376
SOKOLOVSKÁ	0,0252	0,0488	0,0724
SSZ	-0,0383	0,0365	0,0456
STC ENERG.	-0,0249	0,0113	0,0476
SV DOLY	0,0317	0,0575	0,0834
TELECOM	0,0133	0,0144	0,0156
UNIPETROL	0,0319	0,0347	0,0375