

# Americké opce: přehled základních oceňovacích metod a aplikace stochastického stromu

Tomáš Tichý<sup>1</sup>

## Abstrakt

V tomto článku je hlavní pozornost věnována opcím u nichž je možné jejich držitelem zásadním způsobem ovlivnit konečnou výplatu – tedy opcím amerického či případně bermudského typu. Rozšířená práva vlastníka opce mají za následek nutnost hledání optimální strategie umožňující maximalizovat očekávanou konečnou výplatu plynoucí z takovéto opce. Tato skutečnost výrazně ztěžuje aplikaci jinak široce využitelné metodologie simulace Monte Carlo. Zde studovaná metoda stochastického stromu je založena na nekonečně se větvcím stromu. Za účelem získání efektivního výsledku v reálném čase je nutné uvažovat jen s několika okamžiky rozhodování. Tím se dostáváme do oblasti aplikace reálných opcí, které lze oproti opcím finančním snadněji aproximovat v diskrétním čase. Aplikace metody stochastického stromu zároveň představuje základ pro využití metod složitějších. V článku je rovněž studován vliv stratifikace na konečný výsledek.

## Klíčová slova

Americká opce, bermudská opce, optimální strategie uplatnění, stochastický strom, simulace Monte Carlo

## 1 Úvod

Americké opce vykazují oproti opcím evropským některé vlastnosti, které výrazným způsobem ztěžují možnosti odvození oceňovacích formulí či aplikace jednotlivých numerických technik za účelem určení jedinečné ceny splňující podmínku nemožnosti arbitráže. Hledání nových efektivních postupů je zdůrazněno širokým využíváním opcí amerického typu, k němuž dochází jak na trzích s jednotlivými finančními aktivy (akcie, měny, úrokové sazby) tak v oblasti investičního rozhodování (reálné opce), viz Dixit a Pindyck [8].

Zejména možné aplikace v oblasti reálných opcí tlačí na vyvinutí uživatelsky příznivých postupů a metod ocenění. Jednotlivé aplikační možnosti, které rovněž významným podílem ovlivnily oceňovací postupy, tvoří například rozhodování o využívání zásobních přírodních zdrojů (Brennan a Schwartz [2]), rozhodování o využití pozemků pro různé účely (Geltner *et al.* [11]), zhodnocení výrobní flexibility (Triantis a Hodder [22]) či při zcela základním pohledu řízení projektů obecně, blíže viz [19] nebo [20].

Dle základní definice lze opci chápat jako aktivum, poskytující v určitém časovém úseku či okamžiku (doba zralosti  $\mathcal{T}$ ) právo provést s daným aktivem (podkladové aktivum  $\mathcal{S}$ ) předem stanovený typ obchodu. Může se jednat o jeho nákup či prodej za předem stanovenou realizační cenu  $\mathcal{K}$  (*plain vanilla opce*), výměnu za jiné aktivum apod. Právo

<sup>1</sup>Ing. Tomáš Tichý, Ph.D., Katedra Financí, VŠB-TU Ostrava, Sokolská 33, 701 21 Ostrava, Czech Republic. E-mail: tomas.tichy@vsb.cz.

Zásadní část tohoto příspěvku byla podpořena GAČR (Czech Science Foundation – Grantová Agentura České Republiky) v rámci projektu číslo 402/04/1357.

uskutečnit stanovený obchod může být v podmínkách opce dále specifikováno, rozšířeno či zúženo.

Může být podmíněno dosažením určité úrovně ceny podkladového aktiva v průběhu životnosti (*bariérové opce*). Rovněž existuje provázanost výplaty na průměrnou cenu za dobu životnosti (*asijské opce* nebo nejpříznivější cenu – maximální či minimální (*lookback opce*). Poznamenejme, že cenu podkladového aktiva lze dle specifikace opce sledovat po dobu životnosti opce v různě pojatých intervalech (týden, den, hodina či téměř spojitě). Obdobně lze realizační cenu navázat na vybranou proměnlivou (stochastickou) veličinu. Veškeré tyto opce se složitějšími podmínkami se označují jako *exotické*.

Opci, kterou je možné uplatnit pouze v předem stanoveném okamžiku  $\mathcal{T}$  (zpravidla daný den) je nazývána *evropskou*. Oproti tomu opce, jejíž uplatnění je možné v širším časovém úseku (zpravidla po celou dobu životnosti), je označována jako *americká*. V některých případech je možné opci uplatnit sice v širším časovém období, ale pouze v předem stanovených okamžicích. Příkladem může být opce s vícetýdenní životností, kterou je možné uplatnit vždy každý pátek. Jelikož se typologicky jedná o určitý přechod mezi opcemi evropskými a americkými, jsou tyto opce označovány jako opce *bermudské*.

Dle poněkud širší definice jsou americkými opcemi chápány veškeré opční kontrakty, u kterých může jejich vlastník v průběhu životnosti předem stanoveným způsobem ovlivnit finální výplatu. Dle této definice spadají do skupiny amerických opcí mimo jiné i opce typu *shout* – (kdykoliv) v průběhu životnosti lze zčásti či zcela zafixovat budoucí výplatu.

Z definice americké opce lze vyvodit základní princip oceňování – nutnost nalezení optimální strategie, tj. stanovení okamžiku rozhodnutí, které bude maximalizovat očekávanou výplatu. Hledání optimální strategie podstatným způsobem ovlivňuje aplikaci jednotlivých oceňovacích postupů.

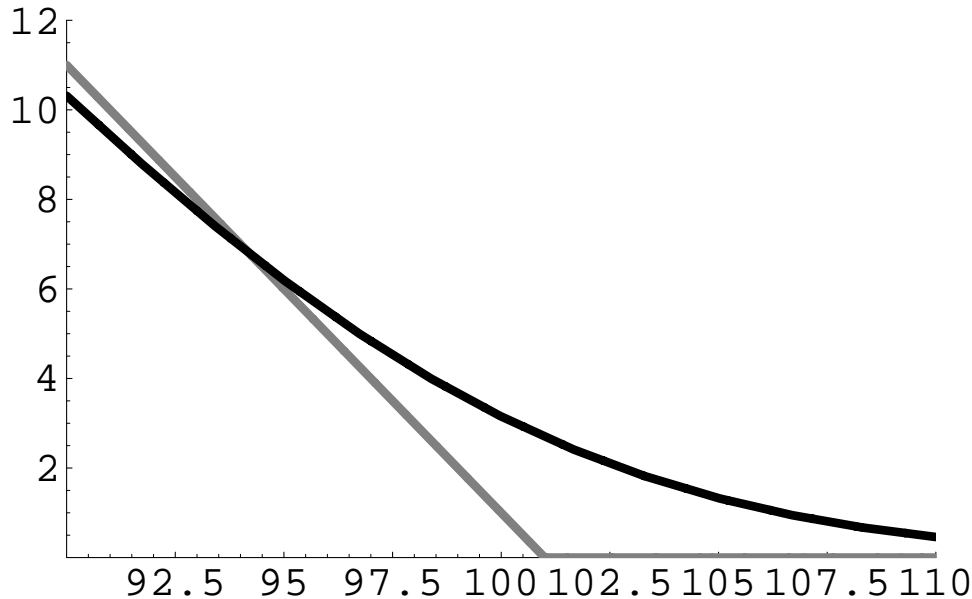
V tomto článku je představena a následně aplikována metoda stochastického stromu, která umožňuje získat aplikací dvou odlišných algoritmů intervalový odhad ceny opce s asymptoticky statisticky nestranným středem. Hlavní výhodou metody je princip simulace Monte Carlo – je tedy aplikovatelná pro celou širší podkladových procesů. To však zároveň indikuje i hlavní nevýhodu – za účelem efektivního ocenění v reálném čase je možné uvažovat jen s několika rozhodnými okamžiky, ve kterých lze opci uplatnit. Aplikace tak přechází do oblasti opcí bermudských.

Postup je následující. Úvodní část článku je věnována principům ocenění amerických opcí a stručnému uvedení hlavních metod. V navazující kapitole je popsána metoda stochastického stromu včetně základů simulace Monte Carlo. Algoritmy pro získání krajních odhadů jsou vysvětleny s pomocí ilustrujícího příkladu. Následně jsou provedena určitá aplikační srovnání, umožňující posoudit vhodnost využití metody.

## 2 Přístupy k ocenění amerických opcí

Definujme americkou opci jako derivát, který je možné uplatnit v jakýkoliv časový okamžik po dobu zralosti  $\mathcal{T}$  (včetně). Stěžejní součástí oceňovací procedury proto je identifikace okamžiku (tj. jeho charakterizování) označovaného jako tzv. *stopping time*  $\tau$ , ve kterém je optimální opci uplatnit a takto maximalizovat očekávanou výplatu. Zároveň tak dojde k ukončení životnosti opce, z čehož je odvozen termín „stopping time.“

Za účelem ilustrace je na Obrázku 1 znázorněna hodnota dvou put opcí,  $p_0$  a  $p_5$ . První je splatná nyní (znázorněna šedě) a druhá za 5 týdnů (znázorněna černě). Uvažujme rovněž put opci bermudského typu  $p_b$ , kterou je možné uplatnit nyní, anebo za 5 týdnů.



Obrázek 1: Optimální uplatnění Bermudské opce

Její hodnota je dána maximem z okamžitého uplatnění a uplatnění za 5 týdnů. Proto  $\mathcal{V}(p_b) = \max[p_0, p_5]$ . Ze znázornění je zřejmé, že při ceně podkladového aktiva v intervalu  $\mathcal{S} \in [0, 94.2]$  je opci optimální okamžitě uplatnit. Avšak při  $\mathcal{S} \in (94.2, \infty]$  je optimální posečkat.

Analýzu lze snadno rozšířit pro bermudské opce s vícero možnostmi uplatnění a v limitním případě také pro opci ryze americkou.

V dílčích podkapitolách této části budou postupně objasněny základy vybraných přístupů. Konkrétně se jedná o parciální diferenciální rovnice, rizikově neutrální přístup a integrální rovnice spolu s prémie uplatnění. Princip další z metod, simulace Monte Carlo, je obsažen v následující kapitole.

## 2.1 BSM PDE

Připomeňme nejdříve základní princip a důsledek oceňování evropských opcí dle Blacka a Scholese [1] (BS model) a Mertona [21]. Předpokládejme pro zjednodušení,<sup>2</sup> že vývoj ceny podkladového aktiva lze zachytit geometrickým Brownovým pohybem následovně:

$$d\mathcal{S} = \mu dt + \sigma d\mathcal{W}. \quad (1)$$

Zde  $\mu$  představuje spojitý (deterministický) výnos,  $\sigma$  je (deterministická) hodnota volatilitity, vše v ročním vyjádření,  $dt$  je nekonečně malá změna času a  $d\mathcal{W}$  představuje jediný zdroj nejistoty, *Wienerův proces* postavený na bázi normovaného normálního rozložení. Aktivum zároveň přináší deterministickou hodnotu spojitého dividendového výnosu  $\delta$ .

Předpokládejme dále, že na trhu je možné dosáhnout stejné bezrizikové sazby  $r$  jak pro bezrizikovou výpůjčku, tak zapůjčku. Uvažujeme-li finanční derivát na aktivum  $\mathcal{S}$ , jehož jediným zdrojem nejistoty je právě cena podkladového aktiva, a je-li s tímto aktivem možné spojitě obchodovat (co do množství i času), pak lze nalézt vhodné portfolio

<sup>2</sup>Analýzu lze rozšířit rovněž pro více komplikované prostředí, tj. jiný podkladový proces, více zdrojů nejistoty, apod.

$\Pi$ , které bude bezrizikové. V rámci popsaných podmínek je složení optimálního portfolia následující:  $\Pi (w_f = 1; w_S = -\frac{\partial f}{\partial S})$ . Na jednu dlouhou pozici ve finančním derivátu  $f$  připadá  $\frac{\partial f}{\partial S}$  krátkých pozic v podkladovém aktivu.

Jelikož je portfolio  $\Pi$  bezrizikové, musí přinášet výnos odpovídající bezrizikové sazbě  $r$  a reálný výnos  $\mu$  aktiva  $S$  není pro určení ceny derivátu relevantní. Tu lze vyjádřit pomocí obecné Blackovy-Scholesovy-Mertonovy parciální diferenciální rovnice takto:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}S(r - \delta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 - rV = 0. \quad (2)$$

Takto určená formule nezávisí na výplatní funkci  $\Psi(S)$  a je proto platná i pro americké opce. Výplatní funkcí konkrétního derivátu však jsou určeny okrajové podmínky, které spolu s rovnicí (2) jedinečným způsobem charakterizují cenu opce.

V případě amerických opcí má soustava okrajových podmínek podobu označovanou jako *free boundary*:

$$\begin{cases} f(S, T) = \Psi(S) \\ f(0, t) = \Psi(0) & \text{pro } t \in [0, T] \\ f(S, t) = \Psi(S) & \text{pro } (S, t) = (\mathcal{B}(t), t) \\ \frac{\partial f(S, t)}{\partial S} = \Psi'(S) & \text{pro } (S, t) = (\mathcal{B}(t), t). \end{cases} \quad (3)$$

Zde  $\mathcal{B}(t)$  určuje hranici mezi oblastmi (cen podkladového aktiva v čase  $t$ ), ve kterých je optimální opci uplatnit a ve kterých je vhodnější opci ponechat k případnému pozdějšímu využití. Jelikož tato hranice zpravidla není předem známa, je příslušná podmínka označována jako volná (*free*). Klíčovou podmínkou, která zamezuje arbitráži je poslední z uvedených. Vychází mimo jiné ze skutečnosti, že v případě uplatnění musí být výplata alespoň taková, jaká je hodnota opce daná pokračováním. A naopak při neuplatnění. Proto rovnost derivací.

Aplikace uvedeného přístupu při řešení oceňovacího problému je však zpravidla vysoce komplikovaná. Alternativou proto může být převedení problému na případ řešený zejména ve fyzice v souvislosti s převodem tepla (*heat equation*). Výsledkem je přístup *variální nerovnosti* jejíž řešení explicitně nezávisí na hranici optimálního uplatnění opce. Tato metoda byla pro případ ocenění amerických opcí aplikována a dále rozvinuta zejména Jailletem *et al.* [17].

## 2.2 Rizikově neutrální přístup

Rizikově neutrální přístup je postaven na aplikaci operátoru očekávání v rizikově neutrálním prostředí. Základní myšlenkou je opět předpoklad sestavení bezrizikového portfolia z finančního derivátu a podkladového aktiva. Existence takového portfolia je na dokonalém trhu dostatečnou podmínkou k využití Girsanova teorému – přechodu z reálného prostředí do prostředí rizikově neutrálního.

Tento přechod má dva kroky. Jednak dochází ke změně růstového faktoru z reálného výnosu zohledňujícího riziko  $\mu$  v rovnici (1) na výnos bezrizikový  $r$ , s případným zakomponováním dividendového výnosu  $\delta$ ,

$$dS = (r - \delta)dt + \sigma dW^{(\mathcal{Q})}. \quad (4)$$

Následně je možné očekávanou výplatu opce  $\Psi(S_\tau)$  diskontovat bezrizikovou sazbou:

$$f_t = e^{-r\tau} \mathbb{E}^{(\mathcal{Q})} [\Psi(S_\tau)]. \quad (5)$$

Zde  $\mathbb{E}$  označuje operátor očekávání,  $(\mathcal{Q})$  říká, že pracujeme v rizikově neutrálním prostředí a  $\tau$  určuje okamžik uplatnění. Uvedený vztah platí bezesbytku pro opce evropského typu. Avšak z úvodu kapitoly víme, že u americké opce je podstatný zejména okamžik uplatnění. Proto je nutné vztah (5) maximalizovat (optimalizovat) přes všechna přípustná  $\tau$ :

$$f_t = \sup_{\tau} e^{-r\tau} \mathbb{E}^{(\mathcal{Q})} [\Psi(\mathcal{S}_{\tau})]. \quad (6)$$

Výsledný vztah je rovněž možné zapsat pomocí tzv. *Snellovy obálky* diskontované výplaty následovně. Hodnota americké opce je dána

$$f_t = \mathbb{E}^{(\mathcal{Q})} [b_{t,\tau} \Psi(\mathcal{S}_{\tau})], \quad (7)$$

kde  $\tau$  je optimální čas uplatnění získaný maximalizací (*Snell envelope*):

$$Z_t = \sup_{\tau} \mathbb{E}^{(\mathcal{Q})} [b_{\tau} \Psi(\mathcal{S}_{\tau})], \quad (8)$$

přičemž  $b_{\tau}$  označuje (alespoň lokálně) bezrizikový diskontní faktor,  $b_{\tau} \equiv \exp(-\int_0^{\tau} r_v dv)$ .

### 2.3 Prémie uplatnění a integrální rovnice

Při oceňování amerických opcí hrají důležitou roli prémie dřívějšího uplatnění (*early exercise premium*, EEP) a prémie odloženého uplatnění (*delayed exercise premium*, DEP). Pro první z nich je klíčové chování Snellovy obálky.

Ve stručnosti, pro  $Z$  definované v (8) platí v čase  $t = 0$ , že je rovno součtu hodnoty evropské opce a EEP, tj.

$$Z_0 = \mathbb{E}^{(\mathcal{Q})} [Z_T] + \mathbb{E}^{(\mathcal{Q})} \left[ \int_0^T \mathbb{I}_{\tau(v)=v} b_{\tau,v} (r_v \Psi_v dv - d\Psi_v) \right]. \quad (9)$$

Zde  $\mathbb{E}^{(\mathcal{Q})} [Z_T]$  představuje diskontovanou hodnotu evropské opce, jelikož  $Z_T = b_T \Psi_T$ , a  $\mathbb{I}_{\tau(v)=v} b_{\tau}$  určuje optimálnost uplatnění. Vztah platí pro jakékoliv  $t \in [0, T]$  za předpokladu, že optimální okamžik uplatnění dosud nenastal.

Obdobným způsobem je charakterizována DEP. Hodnotu opce lze opět rozepsat na součet přínosu z okamžitého uplatnění a DEP:

$$Z_0 = \Psi_t + \mathbb{E}_t^{(\mathcal{Q})} \left[ \int_t^{\tau(t)} b_{\tau,v} (d\Psi_v - r_v \Psi_v dv) \right]. \quad (10)$$

Na základě dekompozice (9) lze formulovat integrální rovnici pro americkou opci, viz například Carr *et al.* Nechť  $c(\mathcal{S}_t, t; \mathcal{K})$  je funkce pro určení ceny evropské call opce v rámci BS modelu [1],  $\mathcal{N}(\cdot)$  je kumulativní funkce normovaného normálního rozložení a

$$d_{\pm}(\mathcal{S}_t, \mathcal{T} - t; \mathcal{K}) = \frac{\ln \frac{\mathcal{S}_t}{\mathcal{K}} + (r - \delta \pm \frac{1}{2} \sigma^2)(\mathcal{T} - t)}{\sigma \sqrt{\mathcal{T} - t}}. \quad (11)$$

Pak lze cenu americké call opce  $C(\mathcal{S}_t, t; \mathcal{B}(), \mathcal{K})$  vyjádřit následovně

$$\begin{aligned} C(\mathcal{S}_t, t; \mathcal{B}(), \mathcal{K}) &= c(\mathcal{S}_t, t; \mathcal{K}) + \\ &\int_t^T \delta \mathcal{S}_t e^{-\delta(v-t)} \mathcal{N}(d_+(\mathcal{S}_t, v - t; \mathcal{B}(v))) dv \\ &- \int_t^T r \mathcal{K} e^{-r(v-t)} \mathcal{N}(d_-(\mathcal{S}_t, v - t; \mathcal{B}(v))) dv. \end{aligned} \quad (12)$$

Optimální hranici uplatnění opce, kterou je nutné dosadit do vztahu (12), lze získat řešením odpovídající integrální formy pro dané okrajové podmínky, tj.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t) - \mathcal{K} &= c(\mathcal{B}(t), t; \mathcal{K}) + \\ &\int_t^T \delta \mathcal{B}(t) e^{-\delta(v-t)} \mathcal{N}(d_+(\mathcal{B}(t), v-t; \mathcal{B}(v))) dv \\ &- \int_t^T r \mathcal{K} e^{-r(v-t)} \mathcal{N}(d_-(\mathcal{B}(t), v-t; \mathcal{B}(v))) dv. \end{aligned} \quad (13)$$

### 3 Metoda stochastického stromu

Metoda stochastického stromu je založena na simulaci náhodného vývoje ceny podkladového aktiva (či podkladových faktorů) prostřednictvím simulace Monte Carlo. Tato metoda byla poprvé aplikována ve financích Boylem [4]. Následně jí je věnována neustávající pozornost. Co se týče aplikace v oblasti ocenění amerických opcí, přehled většiny přístupů včetně odkazů na původní prameny obsahují zejména Boyle *et al.* [3] a Glasserman [10].

Označme  $\Psi_{\mathcal{T}}$  jako výplatu opce při uplatnění v čase  $\mathcal{T}$ . Předpokládejme, že  $\omega$  představuje určitý stav reálu k danému okamžiku a  $\omega \in \Omega$ , kde  $\Omega$  je množina všech přípustných kombinací  $\omega$ . Zároveň je postačující předpokládat, že  $\omega$  se skládá pouze z takových stavů, které jsou relevantní pro určení výplaty.

Tedy například v rámci modelu Blacka a Scholese [1] pro plain vanilla opci se bude jednat pouze o cenu podkladového aktiva v daném čase  $\mathcal{T}$ . Avšak bude-li prostředí ovlivněno stochastickými úrokovými sazbami  $r$  a stochastickou volatilitou  $\sigma$ , bude  $\omega$  obsahovat kombinace  $(\mathcal{S}, r, \sigma)$ . Obdobně, bude-li výplata závislá na hodnotě dvou aktiv,  $\mathcal{S}_a$  a  $\mathcal{S}_b$ , bude  $\omega = (\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b)$ .

Pro odhad hodnoty výplaty opce v daném čase je postačující nasimulovat dostatečně velké množství kombinací  $\omega$ . Tedy, jelikož pro očekávanou hodnotu výplaty platí, že

$$\mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}}[\Psi_{\mathcal{T}}(\omega)] = \int_{\Omega} \Psi_{\mathcal{T}}(\omega) d\mathcal{Q}, \quad (14)$$

tak lze odhad získat jako

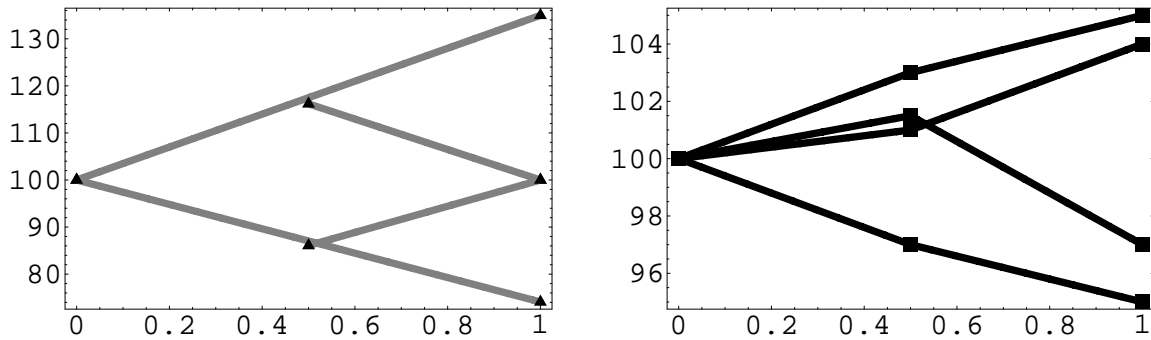
$$\mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}}[\Psi_{\mathcal{T}}(\omega)] \approx \hat{\Psi}_{\mathcal{T}(\omega)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Psi_{\mathcal{T}}^{(\mathcal{Q})}(\omega^{(n)}) \quad \text{pro } N \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Zde  $\mathcal{Q}$  označuje množinu rizikově neutrálních pravděpodobností, tj. pohybujeme se v rizikově neutrálním světě,  $N$  určuje celkový počet stavů  $\omega$ , tj. množství náhodných scénářů, a  $n$  je konkrétní stav.

Jelikož se jedná o základní metodu Monte Carlo, kde mají jednotlivé scénáře stejnou váhu, získáme odhad výplaty opce jako prostý průměr.

Jak bylo uvedeno, v nejjednodušším případě je výplata závislá jen na aktuální ceně podkladového aktiva  $\mathcal{S}$ . Zároveň, za předpokladu, že cena tohoto aktiva sleduje geometrický Brownův pohyb, lze  $n$ -tý stav zjistit v závislosti na počáteční hodnotě  $\mathcal{S}_t$  a při dané volatilitě  $\sigma$ , bezrizikové úrokové sazbě  $r$  a pro  $\tau = \mathcal{T} - t$  následovně:

$$\omega^{(n)} = \mathcal{S}_{\mathcal{T}}^{(n)} = \mathcal{S}_t \exp[\Delta \mathcal{S}_{\tau}^{(n)}] = \mathcal{S}_t \cdot \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma \tilde{\varepsilon}^{(n)} \sqrt{\tau}\right]. \quad (16)$$



Obrázek 2: Vývoj ceny podkladového aktiva  $\mathcal{S}$

Zde  $\tilde{\varepsilon}^{(n)}$  představuje náhodný prvek z normovaného normálního rozložení pro daný scénář  $n$ ,  $\tilde{\varepsilon} \in [0, 1]$ .

Za účelem zjištění hodnoty evropské opce je nutné diskontovat k počátku očekávanou výplatu v době zralosti. Oproti tomu při určování hodnoty americké opce je nutné nejdříve stanovit optimální okamžik uplatnění a teprve následně provést diskontování.

Obrázek 2 ukazuje aproximaci vývoje ceny podkladového aktiva pro dva časové úseky a čtyři výsledné scénáře vývoje. Zatímco na levé straně je vývoj zachycen dle binomického modelu, na straně pravé je aplikována simulace Monte Carlo.

V případě aplikace binomického modelu je optimální okamžik uplatnění  $\tau$  americké opce zjištěn na základě porovnání vnitřní hodnoty v daném uzlu a hodnoty opce dané pokračováním, tj. v závislosti na hodnotách navazujících uzlů. Jinak řečeno, není-li časová hodnota kladná, je optimální opci uplatnit.

Kdybychom stejným způsobem postupovali u simulace Monte Carlo dle pravého znázornění, museli bychom pracovat v dokonale předvídatelném prostředí. Jelikož z každého uzlu pokračuje jen jedna cesta, docházelo by k výraznému nadhodnocení ceny opce:

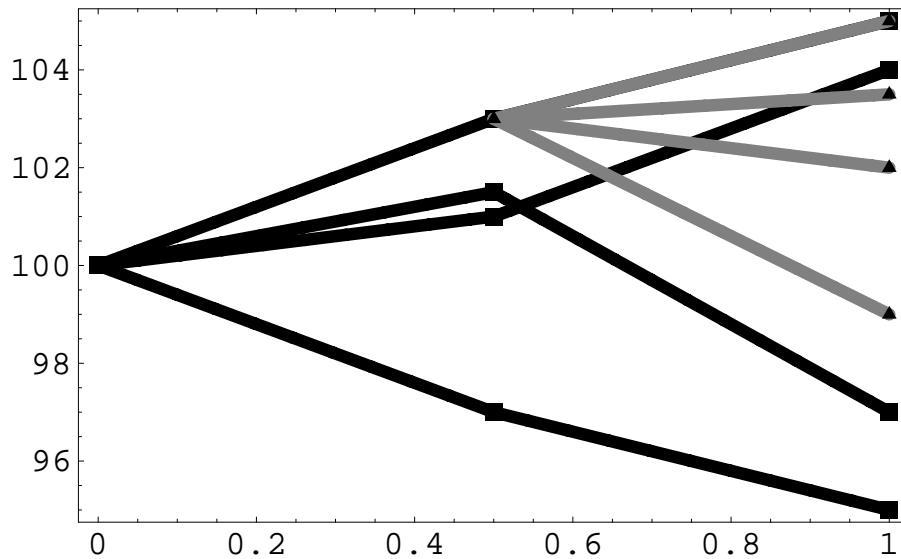
$$\max_i [e^{-rt_i}(\mathcal{S}_{t_i} - \mathcal{K})] \geq e^{-rt}(\mathcal{S}_\tau - \mathcal{K}). \quad (17)$$

Jediným řešením je zjištění hodnoty dané případným pokračováním na základě další simulace z každého uzlu, viz obrázek 3 při navazující simulaci pro horní uzel. To však vede k vysoké časové náročnosti zpracování.

Na principu simulace navazující na každý z uzlů je postavena metoda stochastického stromu vyvinutá v polovině 90.let Broadiem a Glassermanem [6]. Vzhledem k exponenciálně rostoucímu počtu uzlů v uvedeném schématu, které znemožňuje praktickou aplikovatelnost při klasické simulaci, jsou výsledkem metody stochastického stromu dva "chybné" odhady. První nadhodnocující, označme jej  $\mathcal{C}$ , druhý podhodnocující,  $c$ . Společně pak přináší statisticky nestranný odhad.

Aby byla metoda aplikovatelná v reálném čase, je nutné ponechat množství dílčích scénářů náhodného vývoje na nízké úrovni. Označíme-li počet dílčích scénářů (tj. počet cest vedoucích z každého uzlu) jako  $n$  a počet časových intervalů, na které je rozdělena doba životnosti opce (tj. počet budoucích okamžiků, ve kterých lze učinit rozhodnutí) jako  $m$ , bude celkový počet konečných stavů  $n^m$ .

Není-li však celkový počet scénářů dostatečně velký, vykazuje nasimulované rozložení pravděpodobnosti v jednotlivých dílčích částech stromu odlišné charakteristiky než je třeba. Níže popsany algoritmus pro horní odhad pak má tendenci opci nadhodnotit. Princip je následující.



Obrázek 3: Vývoj ceny podkladového aktiva  $\mathcal{S}$  při navazující simulaci

Nadhodnocující odhad  $\mathcal{C}$  je zjištěn klasickým postupem zpětného dynamického programování. Nejdříve určíme výplatu v době zralosti. Poté postupujeme v čase zpět k počátku. V každém z uzlů maximalizujeme hodnotu. Tedy

$$\max \left[ \Psi(\mathcal{S}_{\dots,i}), df^{-1} \frac{\sum_{j=1}^n \mathcal{S}_{\dots,i,j}}{n} \right], \quad (18)$$

tj. pro daný bod v čase vybíráme větší z hodnoty okamžité výplaty  $\Psi(\mathcal{S}_{\dots,i})$  (pozice  $i$  označuje čas, jeho hodnota pak pořadí cesty z předcházejícího uzlu) a hodnoty pokračování, která je určena průměrem hodnot v bezprostředně navazujících uzlech,  $\frac{\sum_{j=1}^n \mathcal{C}_{\dots,i+1,j}}{n}$ . Zde  $\mathcal{C}_{\dots,i,j}$  představuje hodnotu opce pro příslušný scénář vývoje v následujícím časovém úseku a  $df$  je diskontní faktor pro jedno období. Blíže viz Tabulka 5.

Algoritmus pro určení podhodnoceného odhadu  $c$  je poněkud složitější. Je konstruován tak, aby společně s odhadem  $\mathcal{C}$  poskytl odhad statisticky nestranný.

První krok je opět určení výplaty v době zralosti. Hodnota opce v předcházejícím uzlu je poté určena dle upraveného algoritmu. Postupně jsou vybírány jednotlivé scénáře. Pro každý z nich je příslušná hodnota určena na základě porovnání střední hodnoty diskontovaných výplat pro ostatní scénáře a výplaty z okamžitého uplatnění ve výchozím uzlu. Je-li vyšší hodnota okamžitého uplatnění, zapisujeme ji, jinak ponecháváme pro další zpracování hodnotu vybraného scénáře. Hodnotu odhadu pro daný uzel  $c_{\text{uzel}}$  založený na  $\mathcal{S}_{\dots,i}$  získáme zprůměrováním. Obecně pro  $\mathcal{T} - 1$  platí, že

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Když} \left[ df^{-1} \frac{\sum v^{(j)}}{n-1} > \Psi(\mathcal{S}_{\dots,i}), df^{-1} \Psi(\mathcal{S}_{\dots,i,j}), \Psi(\mathcal{S}_{\dots,i}) \right] \quad (19)$$

přičemž  $v^j$  je vektor výplat navazujících na daný uzel při vynechání  $i$ -té výplaty a funkce  $\text{Když} [x, y, z]$  dává  $y$ , platí-li  $x$ , jinak  $z$ .

Postupujeme-li dále k počátku, zaměníme jen navazující výplatu za příslušnou, již vypočtenou, hodnotu opce. Naplnění procedury je zřejmé z Tabulky 6.



Předpokládejme opci na aktivum s roční volatilitou výnosů  $\sigma = 25\%$ . Aktivum nepřináší dividendový výnos. Opce s životností jednoho roku je americká (resp. bermudská), výplatní opce je typu call a realizační cena  $\mathcal{K} = 101$ . Bezriziková sazba je 10% p.a. Předpokládejme možnost uplatnění opce v čase  $\tau = 0, 1/3, 2/3$  a 1. Pro názornost uvažujme s třemi náhodnými scénáři navazujícími na každý z uzlů, tj.  $n = 3$  a  $m = 3$ .

Výpočet nadhodnocujícího odhadu  $\mathcal{C}$  je zachycen v Tabulce 5. Je zřejmé, že v jednom z uzlů je optimální okamžité uplatnění opce. Jedná se o uzel založený na  $\mathcal{S}_{(1,2)} = 105$ . (Přínos z okamžitého uplatnění je 4 jednotky, je vyšší než současná hodnota budoucích výplat.)

Určení dolního odhadu je zpracováno v Tabulce 6. Podívejme se blíže na stejný uzel<sub>1,2</sub>.

$$\begin{aligned}df^{-1}(1.00 + 2.48)/2 &< 4.00 \Rightarrow 4.00 \\df^{-1}(0.00 + 2.48)/2 &< 4.00 \Rightarrow 4.00 \\df^{-1}(0.00 + 1.00)/2 &< 4.00 \Rightarrow 4.00\end{aligned}$$

Proto,  $c_{1,2} = 4.00$ . Což odpovídá i hornímu odhadu  $\mathcal{C}_{1,2}$ . Posuďme rovněž uzel<sub>1,1</sub>.

$$\begin{aligned}df^{-1}(7.60 + 26.65)/2 &> 4.58 \Rightarrow 0.24 \\df^{-1}(0.25 + 26.65)/2 &> 4.58 \Rightarrow 7.35 \\df^{-1}(0.25 + 7.60)/2 &< 4.58 \Rightarrow 4.58\end{aligned}$$

Je zřejmé, že pro první dva scénáře se rozhodujeme pokračovat, avšak konečná výplata je menší, než kdybychom okamžitě uplatnili. Oproti tomu pro třetí scénář se přikláníme k okamžitému uplatnění. Ale pokud bychom tento akt pozdrželi po dobu zralosti, získali bychom více. Výsledkem je  $c_{1,2} = 4.06$ .

## 4 Srovnávací aplikace

V této sekci provedeme několik výpočtů. Zkusme nejprve ověřit efektivnost procedury, tj. blízkost teoreticky správné hodnotě a časovou náročnost. Využijeme skutečnosti, že hodnota americké opce na aktivum, které přináší nulový dividendový výnos, odpovídá hodnotě evropské call opce.

Uvažujme stejnou opci jako v předcházející části. To jest call opce zní na aktivum s roční volatilitou výnosů  $\sigma = 25\%$ . Aktivum nepřináší dividendový výnos. Opce je s životností jednoho roku a realizační cena  $\mathcal{K} = 101$ . Bezriziková sazba je 10% p.a. Předpokládejme možnost uplatnění opce v čase  $\tau = 0, \mathcal{T}/3, 2\mathcal{T}/3$  a  $\mathcal{T}$ .

Z důvodů časové úspory provedeme pouze aplikaci algoritmu pro horní odhad  $\mathcal{C}$ . Následující tabulky v jednotlivých sloupcích uvádí postupně pro jednotlivá  $n$  odhadnutou cenu evropské opce (tj. na základě výplaty v době zralosti), odhadnutou horní cenu americké opce  $\mathcal{C}$  a celkovou časovou náročnost v sekundách (včetně generování jednotlivých scénářů). Poznamenejme, že hodnota evropské opce dle modelu Blacka a Scholese [1] je při daných vstupech  $\mathcal{V}_{BS} = 14.432$ .

Hodnoty v Tabulce 1 jsou získány aplikací základní simulace Monte Carlo – náhodné scénáře navazující na každý z uzlů jsou získány zvlášť na základě generování náhodných prvků z normovaného normálního rozložení. Z tabulky je zřejmé, že odhad horní ceny americké opce je velmi blízký odhadu opce evropské pouze pro vysoká  $n$ . Zároveň však vidíme, že i tak se výsledek znatelně liší od teoretické hodnoty  $\mathcal{V}_{BS} = 14.432$ .

Tabulka 1: Srovnání horního odhadu;  $\mathcal{V}_{BS} = 14.432$ ; základní Monte Carlo

$n$	<i>evropská call</i>	<i>americká call</i>	<i>čas celkem</i>
10	14.891	15.500	0.07
50	13.924	13.949	7.50
100	13.976	13.981	60.84
200	13.383	13.384	482.17

Za účelem získání kvalitnějšího odhadu je možné aplikovat metodu stratifikace. Ta umožňuje i při nízkém počtu náhodných scénářů získat pravděpodobnostní rozložení studované veličiny s požadovanými charakteristikami. Tato metoda je založena na rozčlenění cíleného rozložení na intervaly z nichž jsou náhodné veličiny postupně generovány, blíže viz [24]. Zároveň je vhodné využít možnosti inverzní transformace – nejdříve tedy stratifikujeme rovnoměrně rozložené náhodné prvky z intervalu  $[0; 1]$  (pravděpodobnosti), následně pak zjišťujeme odpovídající hodnoty z cíleného rozložení s využitím inverzní funkce pro dané rozložení.

Následující tabulky 2, 3 a 4 postupně obsahují výsledky při stratifikaci aplikované za účelem generování náhodných cen v časech  $\tau = T/3$  (Tabulka 2),  $\tau = T/3, T2/3$  (Tabulka 3) a  $\tau = T/3, T2/3, T$  (Tabulka 4).

Tabulka 2: Srovnání horního odhadu;  $\mathcal{V}_{BS} = 14.432$ ; stratifikace v  $\tau = T/3$

$n$	<i>evropská call</i>	<i>americká call</i>	<i>čas celkem</i>
10	16.101	16.280	0.06
50	14.814	14.842	7.98
100	14.406	14.412	60.00
200	14.399	14.400	475.17

Dle Tabulky 2 vidíme, že stratifikace v základním čase  $\tau = T/3$ , tj. pro  $n$  cen, je postačující k získání dobrého odhadu ceny opce. Pro odpovídající počet náhodných scénářů rovněž došlo k mírnému přiblížení výsledků pro evropskou a americkou opci. V Tabulce 3, tj. stratifikace  $n^2$  cen, dochází k dalšímu dílčímu zlepšení, to vše při zachování téměř stejné časové náročnosti.

Tabulka 3: Srovnání horního odhadu;  $\mathcal{V}_{BS} = 14.432$ ; stratifikace v  $\tau = T/3, T2/3$

$n$	<i>evropská call</i>	<i>americká call</i>	<i>čas celkem</i>
10	13.746	13.992	0.39
50	14.541	14.570	8.27
100	14.352	14.358	62.48
200	14.402	14.403	494.44

Nejlepší výsledky zcela zřejmě poskytuje stratifikace všech cen, tedy  $n^3$ , což však znamená výrazně vyšší časovou náročnost. Důležité však je, že při odpovídající časové

Tabulka 4: Srovnání horního odhadu;  $\mathcal{V}_{BS} = 14.432$ ; stratifikace v  $\tau = T/3, T2/3, T$

$n$	<i>evropská call</i>	<i>americká call</i>	<i>čas celkem</i>
10	17.353	17.353	0.70
50	14.373	14.373	47.50
100	14.429	14.429	364.81
200	14.432	14.432	2925.08

náročnosti jsou výsledky celkové stratifikace příznivější, jak co se týče odhadů pro evropskou a americkou opci, tak shody s  $\mathcal{V}_{BS}$ .

Shoda odhadů pro evropskou a americkou opci zároveň znamená zvýšení efektivity při aplikaci metody řízené proměnné – tedy využití chyby odhadu ceny opce evropské (analytické řešení je známé) pro upravení ceny opce americké.

## 5 Závěr

Opce s rozšířenými právy vlastníků představují žádaný artikl na derivátových trzích. Zároveň mají široké aplikace v oblasti reálných opcí a investičním rozhodování obecně. Velkým problémem však je neexistence jednoduché formule, která by umožnila snadné, nenáročné a rychlé určení ceny opce. Součástí oceňovacího problému je rovněž optimalizace – nalezení okamžiku uplatnění, který umožní maximalizovat výplatu.

V tomto článku byly jednak představeny hlavní přístupy k ocenění amerických opcí a dále byla ve větší podrobnosti studována metoda stochastického stromu. Metoda je simulačního typu, umožňuje tedy odhadnout cenu opce pro jakýkoliv simulovatelný proces. Zároveň však, za účelem dosažení efektivního výsledku (minimální chyba, akceptovatelný čas), neumožňuje uvažovat s větším počtem okamžiků možného uplatnění.

V rámci aplikační části článku rovněž došlo k posouzení vlivu metody stratifikace, tj. jedné z metod zaměřené na zvýšení efektivity simulační metody. Efekt byl vysoce znatelný. Úplná stratifikace nám zároveň umožní efektivněji aplikovat metodu řízené proměnné.

## Reference

- [1] BLACK, F., SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* **81** (May-June 1973), 637–659, 1973.
- [2] BRENNAN, M.J., SCHWARTZ, E.S. Evaluating natural resource investments, *Journal of Business* **58**, 135–157, 1985.
- [3] BOYLE, P., BROADIE, M., GLASSERMAN, P. Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control* **21**, 1267–1321, 1997.
- [4] BOYLE, P. Options: a Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics* **4**, 323–338, 1977.

- [5] BROADIE, M., DETEMPLE, J.B. Option Pricing: Valuation Models and Applications. *Management Science* **50** (9), 1145–1177, 2004.
- [6] BROADIE, M., GLASSERMAN, P. Pricing American-style securities using simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control* **21**, 1323–1352, 1997.
- [7] CARR, P., JARROW, R., MYNENI, R. Alternative characterizations of American put options. *Mathematical Finance* **2**, 87-106, 1992.
- [8] DIXIT, A., PINDYCK, R. *Investment under uncertainty*. Princeton University Press, 1994.
- [9] DLUHOŠOVÁ D. *et al. New Approaches and Financial Instruments in Financial Decision-Making – Nové přístupy a finanční nástroje ve finančním rozhodování*, VŠB-TU Ostrava, 2004.
- [10] GLASSERMAN, P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag, 2002.
- [11] GELTNER, D., RIDDIOUGH, T., STOJANOVIC, S. Insights on the effect of land use choice: The perpetual option on the best of two underlying assets, *Journal of Urban Economics* **39** (1), 20–50, 1996.
- [12] GRENADIER, S.R., WEISS, A.M. Optimal migration strategies for firms facing technological innovations: An option pricing approach, *Working paper*, Stanford University Graduate School of Business, Research Paper No. 1300, 1994.
- [13] HARRISON, J. M., KREPS, D. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, *Journal of Economic Theory* **20**, 381–408, 1979.
- [14] HARRISON, J. M., PLISKA, S. Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, *Stochastic Processes and Their Applications* **11**, 215-260, 1981.
- [15] HARRISON, J. M., PLISKA, S. A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets, *Stochastic Processes and Applications* **15**, 313-316, 1983.
- [16] HULL, J. C. *Options, Futures, & other Derivatives*. Prentice Hall. 2002.
- [17] JAILLET, P., LAMBERTON, D., LAPEYRE, B. Variational inequalities and the pricing of American options. *Acta Applicandae Mathematicae* **21**, 263-289, 1990.
- [18] LAPRISE, S. B., SU, Y., WU, R., FU, M. C., MADAN, D. B. Pricing American Options: A Comparison of Monte Carlo Simulation Approaches. *Technical report*, University of Maryland. 1999.
- [19] MAJD, S., PINDYCK, R.S. Time to build, option value, and investment decisions, *Journal of Financial Economics* **18**, 7–27, 1987
- [20] MCDONALD, R., SIEGEL, D. Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down, *International Economic Review* **26**, 331–349, 1985.
- [21] MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* **4**, 141–183, 1973.

- [22] TRIANTIS, A.J., HODDER, J. E. Valuing flexibility as a complex option, *Journal of Finance* **45**, 549–565, 1990.
- [23] TICHÝ, T. Přehled základních přístupů k replikaci výplatní funkce finančních derivátů. In Dluhošová D. (ed.) *New Approaches and Financial Instruments in Financial Decision-Making – Nové přístupy a finanční nástroje ve finančním rozhodování*, VŠB-TU Ostrava, 2004.
- [24] TICHÝ, T. Basic ways of Monte Carlo simulation to efficient pricing of European options, *Proceedings of the 23rd International Conference of MME 05* **23**, 381–390, 2005.
- [25] ZMEŠKAL, Z., DLUHOŠOVÁ, D., TICHÝ, T. *Financial Models*, VŠB-TU Ostrava, 2004.

## Summary

### American options – Review of basic methods and the application of stochastic tree approach

In this paper we pay the attention to such options which allows the holder to affect terminal payoff during the contract life. Thus, we study here American and Bermudan options. Extended rights comparing with European claims follow into the need to solve the optimization problem – at which time it is optimal to exercise the option in order to maximize the payoff.

This feature makes difficult an application of majority of standard methods such as Monte Carlo simulation. In this paper we first review several important approach to price American options. Secondly, we study and apply a combination of Monte Carlo simulation and lattice model – the stochastic tree method.

Tabulka 5: Ocenění americké opce – horní odhad

<i>cena aktiva/hodnota opce</i>			
0	1	2	3
		105.58 / 11.12	101.25 / 0.25 108.60 / 7.60 127.65 / 26.65
	<b>109.47</b> / 11.01	105.00 / 4.00	86.56 / 0.00 102.00 / 1.00 103.48 / 2.48
		113.29 / 18.89	129.10 / 8.10 126.31 / 25.31 106.18 / 5.18
		107.13 / 14.77	112.49 / 11.49 112.99 / 11.99 123.34 / 22.34
<b>100</b> / 12.32	<b>98.08</b> / 8.82	79.83 / 0.00	78.20 / 0.00 86.91 / 0.00 61.76 / 0.00
		82.54 / 12.46	101.48 / 0.48 117.22 / 16.22 122.95 / 21.95
		120.52 / 22.16	122.95 / 21.95 133.40 / 31.40 115.38 / 14.38
	<b>107.90</b> / 18.39	98.77 / 0.00	88.94 / 0.00 81.63 / 0.00 89.16 / 0.00
		134.72 / 34.61	183.25 / 82.25 117.92 / 16.92 109.18 / 8.18

Tabulka 6: Ocenění americké opce – dolní odhad

<i>cena aktiva/hodnota opce</i>			
0	1	2	3
		105.58 / 4.06	101.25 / 0.25 108.60 / 7.60 127.65 / 26.65
	<b>109.47 / 5.35</b>	105.00 / 4.00	86.56 / 0.00 102.00 / 1.00 103.48 / 2.48
		113.29 / 18.89	129.10 / 8.10 126.31 / 25.31 106.18 / 5.18
		107.13 / 14.77	112.49 / 11.49 112.99 / 11.99 123.34 / 22.34
<b>100 / 8.47</b>	<b>98.08 / 8.82</b>	79.83 / 0.00	78.20 / 0.00 86.91 / 0.00 61.76 / 0.00
		82.54 / 12.46	101.48 / 0.48 117.22 / 16.22 122.95 / 21.95
		120.52 / 18.22	122.95 / 21.95 133.40 / 31.40 115.38 / 14.38
	<b>107.90 / 12.11</b>	98.77 / 0.00	88.94 / 0.00 81.63 / 0.00 89.16 / 0.00
		134.72 / 19.19	183.25 / 82.25 117.92 / 16.92 109.18 / 8.18