Ověření ocenění opcí metodou Quasi-Monte-Carlo

Leoš Gregor [1]

Abstrakt

Příspěvek je zaměřen na možnost využití simulačních metod při oceňování opcí. Pozornost je věnována popisu deterministické formě metody Monte-Carlo, kterou označujeme jako metodu Quasi-Monte-Carlo. Při aplikaci Quasi-Monte-Carlo metody jsou pseudo-náhodná čísla nahrazena tzv. quasi-náhodnými čísly, která jsou generována pomocí deterministických algoritmů. Charakteristickou vlastností takových čísel je to, že vyplňují jednotkový čtverec rovnoměrněji a poskytují lepší výsledky ocenění finančních derivátů. Tuto vlastnost označujeme jako *low-discrepancy*, podrobněji o této vlastnosti např. Glasserman (2003), Morokoff (1997), Niederreiter (1992) a další. V příspěvku je popsána aplikace metody Quasi-Monte-Carlo při oceňování finančních opcí. Na příkladu ocenění evropské *plain-vanilla* call opce je provedeno srovnání výsledných cen vypočtených pomocí metod Quasi-Monte-Carlo, Monte-Carlo a analytické Black-Scholesovy formule. Pozornost je věnována také směrodatným chybám vypočtených cen opcí a době výpočtu cen opcí. Výsledky jsou popsány a graficky prezentovány.

Klíčová slova

Finanční opce, Black-Scholesův model, metoda Monte-Carlo, metoda Quasi-Monte-Carlo, simulace, low-discrepancy sekvence, pseudo-náhodná čísla, quasi-náhodná čísla, deterministické algoritmy.

1 Úvod

V posledních letech, s rozvojem výpočetní techniky, dochází k rozvoji moderních nástrojů, které pomáhají řešit problémy různé složitosti ze všech oblastí vědy a výzkumu. Jednu z těchto nových metod představuje přístup založený na simulovaném řešení úloh, též označovaný jako metoda Monte-Carlo. Historie této metody sice spadá do poloviny minulého století, ale teprve v poslední době je jejímu využití věnována patřičná pozornost.

S využitím metody Monte-Carlo jsou při ocenění opcí spojeny výhody i nevýhody. Jednou z nevýhod může být malá rychlost konvergence, která činí $O\left(N^{-1/2}\right)$, kde N je počet simulací. Proto byly navrženy postupy urychlující konvergenci a zvyšující efektivnost celého výpočtu. K těmto postupům lze zařadit metody redukce rozptylu (použití protikladných proměnných - *antithetic variates* a řízených proměnných - *control variates*) a také postupy zvyšující kvalitu generátoru pseudo-náhodných čísel, kdy tato čísla jsou nahrazena quasi-náhodnými čísly, která jsou tvořena pomocí deterministických algoritmů. Použití quasi-náhodných čísel při simulování označujeme jako metodu Quasi-Monte-Carlo.

Obecné metody Monte-Carlo a Quasi-Monte-Carlo jsou využívány jako nástroj řešení celé řady problémů z finanční oblasti finančního řízení, rozhodování, oceňování, optimalizace a zajištění. Aplikace použití obou metod při řešení portfolio analýz lze najít v Saliby a Pacheco (2002). Oceňování finančních derivátů, finančních *plain—vanilla* i exotických opcí, pomocí

[1] Ing. Leoš Gregor, VŠB-TU Ostrava, Ekonomická fakulta, Katedra financí, Sokolská 33, Ostrava 1, 701 21, leos.gregor@vsb.cz, leos.gregor@centrum.cz.

vybraných metod Monte-Carlo a Quasi-Monte-Carlo, je uvedeno např. v Arencibia a Gregor (2004), Brodie a Glasserman (1999), Glasserman (2003), Charnes (2000), Krykova (2003), Ökten (1999) a další.

Tento příspěvek je věnován popisu metodiky metody Quasi-Monte-Carlo a využití této metody při oceňování finančních opcí. Pozornost je zaměřena na charakteristiku deterministických sekvencí quasi-náhodných čísel. Ověření ocenění metodou Quasi-Monte-Carlo je provedeno na příkladu evropské *plain-vanilla* call opce s využitím různých modelů quasi-náhodných čísel, např. Haltonovy, Faureho, Sobolovy, Wozniakowskiho a Hammersleyho sekvencí. Výsledky ocenění jsou porovnány s analytickým řešením vypočteným dle Black-Scholesovy formule a klasické metody Monte-Carlo. Kromě výpočtu ceny opce je pozornost věnována také odhadu chyby střední hodnoty ceny opce a době výpočtu. Pro tvorbu quasi-náhodných čísel a při ocenění je využit softwarový produkt *Mathematica*®.

2 Simulační metody oceňování opcí

Finanční opce představuje cenný papír, jehož majitel má právo, nikoli povinnost, k nákupu (call opce) či prodeji (put opce) podkladového aktiva v určitý čas (dobu expirace, splatnosti opce) a za stanovenou cenu (realizační cena). Podkladovým aktivem může být akcie, kurz měny, komodita a další. Jde o finanční derivát, jehož cena je odvozena od ceny jiného aktiva. S opcemi se obchoduje na burzovních trzích, ale především pak na tzv. mimoburzovních trzích (OTC trzích – *over the counter*). Je-li opci možno uplatnit po celou dobu existence opce, jde o opci amerického stylu, je–li opci možno uplatnit pouze v den expirace, jde o opci evropského typu. Mimo tyto základní typy opcí rozlišujeme také skupinu tzv.exotických opcí, které představují modifikované typy základních typů opcí se složitějšími výplatními funkcemi. Mezi exotické opce lze zařadit bariérové opce, asijské opce, složené opce, zpětné opce a další, podrobněji viz Hull (2000).

V teorii i praxi lze rozlišit několik základních oceňovacích metod. K ocenění opcí přistupujeme diskrétním či spojitým přístupem. K oceňování opcí lze použít:

- analytické metody - Black-Scholesův model, Blackův model,
- numerické metody - binomický model, trinomický model a metoda konečných prvků,
- simulační metody - metody Monte-Carlo (MC), Quasi-Monte-Carlo (QMC).

Simulační metody jsou postaveny na principu řešení numerické úlohy pomocí mnohočetného opakování náhodných pokusů, a to s využitím teorie pravděpodobnosti a statistiky, matematické analýzy a především výpočetní techniky.

Numerické řešení metodou MC je založeno na aproximaci řešení jednoduchého integrálu funkce $f(x)$ takto

$$I_N f := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \approx \int_{[0,1]^s} f(x)\,dx =: If \quad , \qquad (2.1)$$

kde sekvence $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$ představuje nezávisle a náhodně rozdělená náhodná čísla. Chybu integrace lze vyjádřit jako

$$\left(I_f - I_N f\right) \le O\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right), \qquad (2.2)$$

kde N je počet provedených pokusů. Ze vztahu (2.2) je zřejmé, že velikost chyby je nezávislá na velikosti dimense prostoru *s*, podrobnosti viz Winiarski (2003).

2.1 Metoda Monte-Carlo (MC)

Postup ocenění metodou MC je ukázán na evropské *plain-vanilla* call opci na akcii, c_t.

- Určíme tvar výplatní funkce. Evropská *plain-vanilla* call opce na akcii má výplatní funkci ve tvaru

$$\tilde{V}_T = \max(\tilde{S}_T - R, 0), \tag{2.3}$$

kde R je realizační cena, $\tilde{V}_T$ představuje simulovanou vnitřní hodnotu call opce získanou jednou simulací v době vypršení opce T a $\tilde{S}_T$ je simulovaná náhodná cena podkladového aktiva v době vypršení opce.

- Určíme koncovou cenu podkladového aktiva (akcie), $\tilde{S}_T$, která se řídí geometrickým Brownovým pohybem popsaným stochastickou diferenciální rovnicí ve tvaru

$$\frac{dS_t}{S_t} = r \cdot dt + \sigma \cdot dW_t, \tag{2.4}$$

kde W_t je standardní Wienerův proces a konstantní symboly r a σ označují drift (za předpokladu rizikově neutrálního přístupu je roven bezrizikové sazbě) a volatilitu podkladového aktiva. Úpravou a řešením rovnice (2.4) dostaneme rovnici ve spojitém tvaru

$$\tilde{S}_t = S_{t-dt} \cdot e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot dt + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{dt}}, \tag{2.5}$$

kde ε je generovaná náhodná složka z normovaného normálního rozdělení *N(0,1)* nebo jiného pravděpodobnostního rozdělení, které by lépe popisovalo rozdělení výnosů podkladového aktiva, σ je volatilita výnosů podkladového aktiva, r je bezriziková sazba, dt je délka časového sub-intervalu, vypočtená jako

$$\Delta t = t_i - t_{i-1} = \frac{T}{m}, \tag{2.6}$$

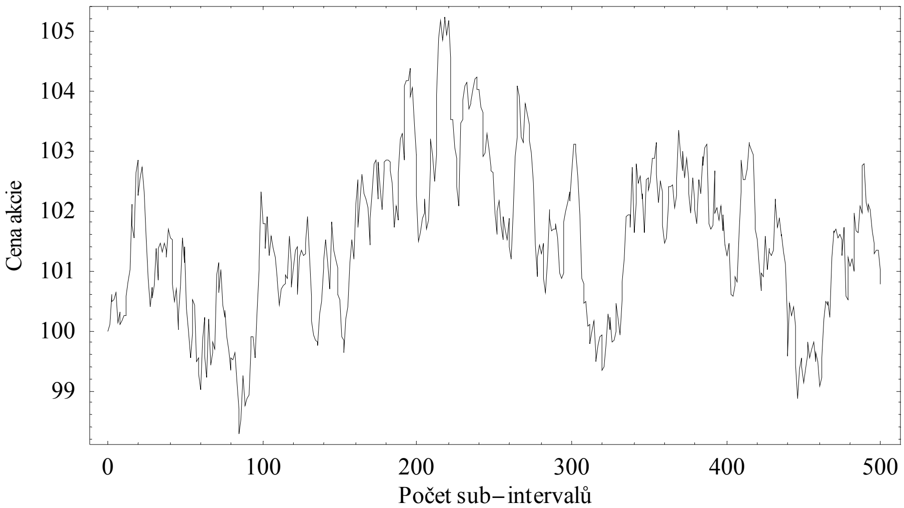
kde m je počet časových sub-intervalů.

- Cenu opce (c_t) získáme vypočtením ceny podle příslušné výplatní funkce v konečných uzlech jednotlivých simulací. Vypočteme střední hodnotu $E(\tilde{V}_T)$ ze simulovaných hodnot call opcí, kterou diskontujeme bezrizikovou úrokovou sazbou r k datu stanovení ceny

$$c_t = e^{-rT} \cdot E(\tilde{V}_T). \tag{2.7}$$

Na Obr.1 je možno vidět simulovaný náhodný vývoj podkladového aktiva (akcie) pro 500 časových sub-intervalů a s počáteční cenou rovnou 100.

Obr.č. 1: Náhodný vývoj podkladového aktiva



2.2 Metoda Quasi-Monte-Carlo (QMC)

Metodu Quasi-Monte-Carlo lze považovat za deterministickou verzi obecné metody MC. Postup aplikace metody QMC je podobný jako u metody MC, s tím rozdílem, že místo pseudo-náhodných čísel se používají quasi-náhodná čísla. Charakteristika a popis tvorby pseudo-náhodných čísel je uvedena např. v L´Ecuyer (1994), Morokoff (1997) nebo Niederreiter (1992). Quasi-náhodná čísla se vyznačují rovnoměrnějším rozdělením na jednotkovém čtverci, viz Glasserman (2003) nebo Gregor (2005). Díky této vlastnosti se metoda QMC označuje také jako *low-discrepancy* (LD) procedura nebo sekvence.
Za LD sekvenci označujeme množinu bodů *s*-dimensionálního prostoru, které vyplňují jednotkový prostor efektivněji (rovnoměrněji), než body množiny pseudo-náhodných čísel.
Nechť prvky $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$ jsou sekvencí s-dimensionálního prostoru $[0,1]^s$ a nechť $J \subseteq [0,1]^s$, potom definujeme

$$D(J,N) = \frac{\#\{n : x_n \in J\}}{N} - V(J) \quad , \tag{2.8}$$

kde $V(J)$ je mocnost množiny J. Za předpokladu toho, že $D(J,N) = 0$, můžeme říct, že sekvence $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$ může integrovat jednoduchou funkci $f(x)$ a platí

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_{[0,1]^s} f(x)\,dx \quad . \tag{2.9}$$

K nejznámějším typům LD sekvencím lze zařadit tyto: Haltonovu, Faureho, Sobolovu, Wozniakowu, Hammerslyho, Niederreiterovu sekvenci a další. Podrobnější popis vybraných LD sekvencí je uveden v následujících části tohoto příspěvku.

Východiskem pro tvorbu quasi-náhodných čísel je Van der Corputova sekvence. Jde o nejjednodušší jedno-dimensionální sekvenci. *N*-tý člen Van der Corputovy sekvence x_n získáme takto:

- přirozené číslo n (v bázi b) vyjádříme ve vztahu

$$n = \sum_{i=1}^{I} a_i b^i \quad , \tag{2.10}$$

- transponujeme cifry a_i do podoby

$$x_n = \sum_{i=0}^{I} \frac{a_i}{b^{i+1}} . \tag{2.11}$$

Van der Corputova sekvence je příkladem sekvence, kde báze je rovna 2 a celá sekvence začíná takto

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{5}{16}, \frac{13}{16}, \frac{3}{16}, \frac{11}{16}, \frac{7}{16}, \frac{15}{16} .$$

K základním LD sekvencím patří tyto;

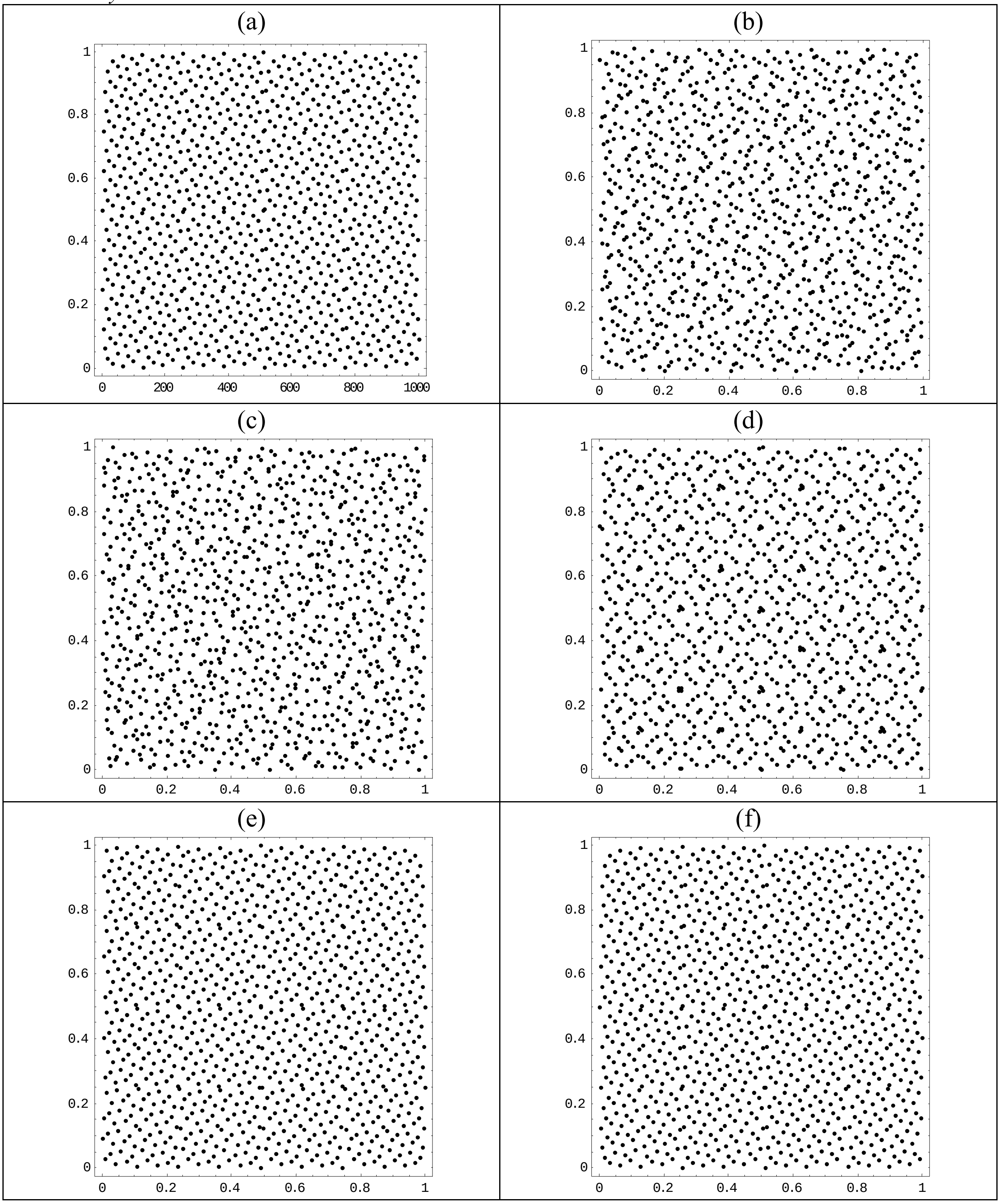
- Haltonova sekvence (HS) je *s*-dimensionální sekvence jednotkového prostoru $[0,1]^s$, kde první dimense je tvořena Van der Corputovou sekvencí báze 2 a druhá dimense je Van der Corputova sekvence báze 3. Dimense Haltonovy sekvence jsou v bázi tvořeny *s*-tým prvočíslem.
- Faureho sekvence (FS) je s-dimensionální sekvencí. Jde o $(0,s)-sekvenci$, kde báze je aspoň tak velká jako dimense *s*. FS využívá ve všech dimensích nejmenší prvočíslo (*p*) tak, aby platilo

  $$p \geq s \quad \text{a} \quad p \geq 2 . \tag{2.12}$$

  První dimensí FS je Van der Corputova sekvence v bázi *p*, další dimense jsou permutací první dimense.
- Sobolova sekvence (SS) je *s*-dimensionální $(t,s)-sekvence$. První dimense SS je Van der Corputova sekvence s bází rovnou 2, vyšší dimense jsou permutací sekvence 1.dimense.
- Wozniakowskiho sekvence (WS) je *2*-dimensionální, kde první dimense je tvořena pomocí reverzního algoritmu druhé dimense, kterou tvoří sekvence Van der Corputova v bázi 2. Podrobně je tato sekvence popsána v Wozniakowski (1991).
- Hammersleyho sekvence (HAMS) je *s*-dimensionální sekvencí. První dimense je tvořena dle reverzního algoritmu podílu pořadí a počtu prvků v sekvenci, druhá dimense je tvořena Van der Corputovou sekvencí báze 2.

Grafická vizualizace vybraných LD sekvencí je uvedena na Obr.2a-2f.

Obr.2: 1000 prvků (a) Van der Corputovy sekvence (b) Haltonovy sekvence, dimense1, 2 (c) Faureho sekvence, dimense 1 a 2, báze 3 (d) Sobolova sekvence, dimense 1 a 2, báze 2 (e) Wozniakowskiho sekvence a (f) Hammersleyho sekvence



3 Ověření ocenění metodou QMC

Aplikační část příspěvku je zaměřena na ověření možnosti využití jednotlivých quasi-náhodných sekvencí při oceňování finančních opcí. Na příkladu evropské *plain-vanilla* call opce na akcii bylo provedeno porovnání výsledků ocenění těmito metodami: klasické metody

MC (MC), QMC s využitím Haltonovy (HS), Faureho (FS), Sobolovy (SS), Wozniakowskiho (WS), Hammersleyho (HAMS) sekvence. U Haltonovy a Faureho sekvence bylo ocenění provedeno pro dimensi 1,2. Výsledky ocenění pomocí MC a QMC metod byly porovnány s analytickou cenou opce, která byla vypočtena pomocí Black-Scholesovy formule.

Vstupní parametry pro ocenění opce byly zvoleny takto:

- $T = 1$,
- $R = 90$,
- $\sigma = 0,1$,
- $\rho = 0$,
- $S = 100$,
- $r = 3,5\%$.

Ocenění pomocí simulačních technik bylo provedeno pro různý počet simulací od 1 000 do 1 000 000. Výpočty nebyly zaměřeny pouze na stanovení cen opcí, ale byly sledovány také standardní chyby ceny opce a čas výpočtu. K výpočtu byl použit software *Mathematica® v.4.1*, ve kterém byly naprogramovány algoritmy pro generování quasi-náhodných sekvencí a následně také moduly pro vypočtení cen opcí a jejich směrodatných chyb. Výpočet byl proveden na počítači Intel Pentium 526 RAM, 2,39 GHz.

Počet simulací	**MC**	**HS**	**FS**	**SS**	**WS**	**HAMS**
1 000	13,6226	13,4136	13,4133	13,4165	13,4594	13,3955
5 000	13,2839	13,4323	13,4275	13,4269	13,4409	13,4252
10 000	13,3792	13,4314	13,4307	13,4289	13,4379	13,4296
50 000	13,4050	13,4341	13,4338	13,4340	13,4351	13,4330
100 000	13,4567	13,4342	13,4343	13,4342	13,4348	13,4388
500 000	13,4285	13,4344	13,4342	13,4343	13,4344	13,4342
1 000 000	13,4453	13,4343	13,4343	13,4343	13,4343	13,4343

Tab.č.1: Výsledky ocenění pomocí zvolených MC a QMC metod

Prvním hodnotícím kritériem vhodnosti QMC při oceňování finančních opcí bylo porovnání cen opcí. Pro vhodné porovnání byla rovněž stanovena Black-Scholesova analytická cena[2], která pro zadané vstupní parametry činí 13,4343, a simulační cena stanovená metodou MC podle postupu uvedeného v kap. 2.1. V Tab.1 jsou uvedeny výsledky cen opcí stanovených pomocí zvolených MC a QMC metod.

Z výsledků uvedených v Tab.1 je zřejmé, že všechny zvolené metody založené na principu quasi-náhodných čísel poskytují lepší výsledky, než klasická obecná metoda MC. Vypočtené ceny konvergují zřetelně k analytické BS ceně, při 1 000 000 provedených simulací se od analytické ceny výrazněji neodchylují[3]. Při 10 000 simulacích se cena opce stanovená pomocí techniky MC odlišuje o 0,15 od analytické BS ceny, kdežto při použití QMC technik je odchylka menší než 0,05. Z výpočtů i grafických prezentací je zřejmá vyšší rychlost konvergence QMC technik oproti metodě MC, což potvrzuje obecné závěry prezentované v teoretické části tohoto příspěvku. Nejrychlejší konvergence k analytické ceně je možno vidět u metody FS, SS. Grafická prezentace vypočtených výsledků je pro jednotlivé sekvence uvedena na Obr.3a-8a.

[2] Podrobněji o výpočtu Black-Scholesovy ceny např. Arencibia a Gregor (2004) nebo Hull (2000).
[3] Při výpočtu na 4 desetinná místa.

Počet simulací	MC	HS	FS	SS	WS	HAMS
1 000	0,307225	0,298035	0,296854	0,297250	0,299764	0,296648
5 000	0,133094	0,133514	0,133470	0,133483	0,133773	0,133367
10 000	0,095125	0,094422	0,094455	0,094384	0,394578	0,094382
50 000	0,042243	0,042252	0,042250	0,042245	0,042264	0,042243
100 000	0,029917	0,029878	0,029878	0,029876	0,029883	0,029874
500 000	0,013348	0,013362	0,013361	0,013361	0,013362	0,013361
1 000 000	0,009457	0,009448	0,009448	0,009448	0,009448	0,009448

Tab.č.2: Výsledky směrodatných chyb výsledných cen opcí vypočtených pomocí zvolených MC a QMC metod

S cenami opcí byly vypočteny také směrodatné chyby cen opcí. Výsledky jsou uvedeny v Tab.2 a graficky prezentovány v Příloze 1 na Obr.3b-8b. Z výsledků je zřejmé, že směrodatná chyba klesá v závislosti na zvyšujícím se počtu simulací u všech použitých metod. Při 1 000 000 provedených simulací je chyba menší než 0,01.

Počet simulací	MC	HS	FS	SS	WS	HAMS
1 000	0,032	0,437	0,625	1,188	0,094	0,125
5 000	0,156	1,922	3,953	8,015	0,719	0640
10 000	0,265	4,375	8,765	18,203	1,515	1,343
50 000	1,453	22,594	53,438	118,203	8,297	7,469
100 000	2,938	45,703	115,954	266,546	17,266	15,688
500 000	14,484	229,125	688,875	1572,610	92,125	84,578
1 000 000	28,844	467,797	1513,060	3428,090	187,390	175,500

Tab.č.3: Doba výpočtu pomocí vybraných MC a QMC metod

Úspěšnost použití jednotlivých metod nelze hodnotit pouze podle vypočtených ceny a směrodatných chyb opcí, důležitou roli hraje také doba samotného výpočtu. Informace o době výpočtu pro vybrané simulační metody jsou uvedeny v Tab.3.

V Tab.3 je vidět, že na čas potřebný k výpočtu je nejméně náročná metoda MC, u všech QMC metod je doba výpočtu vyšší. Z vybraných QMC metod je nejméně časově náročná metoda HAMS a WS, kdy se doba výpočtu pohybuje okolo 3 minut pro 1 000 000 simulací. Ovšem pro stejný počet simulací je např. doba výpočtu FS metodou již více než 25 minut a u metody SS téměř hodina. Podle zjištěných dob výpočtu lze konstatovat, že čas potřebný pro výpočet roste v závislosti na počtu simulací lineárně.

Z časové analýzy je zřejmé, že časová náročnost SS a FS je sice vykoupena velmi kvalitními výsledky, ale u ostatních QMC metod je časová náročnost mnohem menší (cca 12-15-krát menší) a výsledky ocenění i směrodatných chyb nejsou diametrálně odlišné.

Vzhledem k výsledkům ocenění a časové náročnosti se tak jeví jako vhodný kompromis kvality, přesnosti a rychlosti získání výsledku použití metody WS.

4 Ověření ocenění metodou QMC

Simulační metody, metody Monte-Carlo, jsou v posledním období často využívaným nástrojem řešení různě složitých finančních problémů. Jejich uplatnění je například při oceňování, správě nebo hedgingu finančních derivátů, především pak opcí. Princip řešení úlohy pomocí metody Monte-Carlo je založen na mnohočetném opakování náhodných pokusů. V praxi se častěji využívají tzv. pseudonáhodné pokusy, což jsou náhodné pokusy realizované s využitím počítače. Řešení metodou Monte-Carlo je spojeno s pomalou konvergencí ke správnému výsledku, proto byly navrženy postupy urychlující konvergenci. Jedním z těchto postupů je modifikace metody Monte-Carlo do podoby Quasi-Monte-Carla, kde pseudo-náhodná čísla jsou nahrazena čísly quasi-náhodnými.

Tento příspěvek byl věnován popisu metodiky Quasi-Monte-Carlo a aplikaci této metody při oceňování finančních derivátů. Na příkladu ocenění evropské *plain-vanilla* call opce bylo provedeno porovnání výsledků s analytickou cenou stanovenou podle Black-Scholesovy formule a obecnou metodou Monte-Carlo. Podrobně byly popsány vybrané Quasi-Monte-Carlo sekvence (Haltonova, Faureho, Sobolova, Wozniakowskiho, Hammersleyho).

Z výsledků ocenění opcí bylo zjištěno, že metody Quasi-Monte-Carlo poskytují lepší výsledky ocenění a rychleji konvergují k analytické Black-Scholesově ceně, než obecná metoda Monte-Carlo. Ze zvolených metod bylo nejlepších výsledků dosaženo u ocenění pomocí Sobolovy a Faureho sekvence. Velikost směrodatné chyby byla u metody Monte-Carlo a vybraných metod Quasi-Monte-Carlo srovnatelná. Z hlediska časové náročnosti vyplynulo, že všechny zvolené Quasi-Monte-Carlo metody byly časově náročnější než obecná metoda Monte-Carlo, ovšem výsledky ocenění tento deficit nahrazují. Jako vhodný kompromis mezi dobou ocenění a kvalitou dosaženého výsledku lze pro ocenění doporučit použití Wozniakowskiho sekvence.

Literatura

[1] ALEXANDER, C. (1999) *Risk Management and Analysis, Volume 1: Measuring and Modelling Financial Risk*. John Willey & Sons, Inc., Chichester. ISBN 0-471-97957-0.

[2] ARENCIBIA, O. - GREGOR, L (2004) *Application of Monte-Carlo Methods in Option Pricing*. In: Documentos de Trabajo – SEJ 281. Universidad de Cordoba, 2004/10. ISBN 84-95723-26-3.

[3] BOYLE, P. (1977) *Options: A Monte-Carlo Approach*. In: Journal of Financial Economics, No. 4, pp. 323-338.

[4] BRODIE, M. – GLASSERMAN, P. (1999) *Simulation for Option Pricing and Risk Management*. In: Risk management and Analysis, Volume 1: Measuring and Modelling Financial Risk, pp. 173-207. John Willey & Sons, Singapore. ISBN 0-471-97957-0.

[5] DUAN, J.-Ch. – GAUTHIER, G. – SIMONATO, J.-G. (1999) *Fast Valuation of Derivative Contracts by Simulation*. Working Paper, Department of Finance, Hong Kong University of Science and Technology and École des Hautes Études Commerciales, Montreal.

[6] ENTACHER, K. (2000) *Haar Function Based Estimates of the Star-Discrepancy of Plane Digital Nets*. In: Monatshefte für Mathematik, No. 130, pp. 99-108. Springer-Verlag.

[7] ENTACHER, K. (2001) *On the Beauty of Uniform Distribution Modulo One*. Working Paper, School of Telecommunications Engineering, Salzburg University of Applied Science & Technologies.

[8] FRIEDEL, I. – KELLER, A. (1999) *Fast Generation of Randomized Low-Discrepancy point Sets*. Working Paper, Computer Science Dept. of California Institute of Technology and Computer Science Dept. of University of Kaiserslautern.

[9] GLASSERMAN, P. (2003) *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-00451-3.

[10] GREGOR, L. (2005) *Low-discrepancy sequences*. In: The 5th Annual of International Conference IMEA 2005. Technical university of Liberec, Faculty of Economics. ISBN 80-7083-929-5.

[11] HULL, J.C. (2000) *Options, Futures,and Other Derivatives*. Prentice Hall:Upper Saddle. ISBN 0-13-015822-4.

[12] CHARNES, J., M. (2000) *Using simulation for option pricing*. In: Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference, Orlando.

[13] KRYKOVA I. (2003) *Evaluating of the Path-dependent Securities with low Discrepancy Methods*. Thesis of the Worchester Polytechnic Institute in Financial Mathematics.

[14] L´ECUYER, P. (1994) *Uniform Random Number Generation*. In: Annals of Operation Research, No. 53, pp. 77-120.

[15] L´ECUYER, P. – LEMIEUX, Ch. (2002) *Recent Advanes in Randomized Quasi-Monte Carlo Methods*. Working Paper.

[16] MOROKOFF, W.J. (1997) *Generating Quasi-Random Paths for Stochastic Processes*. Working Paper, Mathematics Dept. of UCLA.

[17] NIEDERREITER, H. (1992) *Random number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*. SIAM, Philadelphia. ISBN 0-89871-295-5.

[18] OWEN, A. B. (1998) *Halton Sequences Avoid the Origin*. Stanford University.

[19] ÖKTEN, G. (1999) *Quasi-Monte Carlo in Option Pricing*. In: Mathematica in Education and Research, Vol. 8, No. 3-4, pp. 52-57.

[20] SALIBY, E. – Pacheco, F. (2002) *An Empirical Evaluation of Sampling Methods in Risk Analysis Simulation: Quasi-Monte Carlo, Descriptive Sampling and Latin Hypercube Sampling*. In: Proceedings of the Winter Simulation Conference, pp. 1606-1610.

[21] SÁNDOR, Z. – TRAIN, K. (2002) *Quasi-Random Simulation of Discrete Choice Models*. Working Paper, Erasmus University Rotterdam and University of California, Berkeley.

[22] TAN, K.S. – BOYLE, P.P. (2000) *Applications of randomized low discrepancy sequences to the valuation of complex securities*. In: Journal of Economic Dynamics & Control, No. 24, pp. 1747-1782. Elsevier.

[23] VARIAN, H.R. (1996) *Economic and Financial Modeling with Mathematica* ®. New-York: Springer-TELOS. ISBN 0-387-94518-0.

[24] WINIARSKI, M. (2003) *Quasi-Monte Carlo Derivative Valuation & Reduction of Simulation Bias*. Working Paper.

[25] WOLFRAM, S. (1999) *The Mathematica Book*. Wolfram Media-Cambridge University Press. World Wibe Web: http://www.wolfram.com.

[26] WOZNIAKOWSKI, H. (1991) *Average Case Complexity of Linear Multivariate Problems Part I: Theory*. Department of Computer Science, Columbia University, Working Paper.

[27] ZMEŠKAL. Z (2004) *Finanční modely*. Ekopress, Havlíčkův Brod. ISBN 80-86119-87-4.

Summary

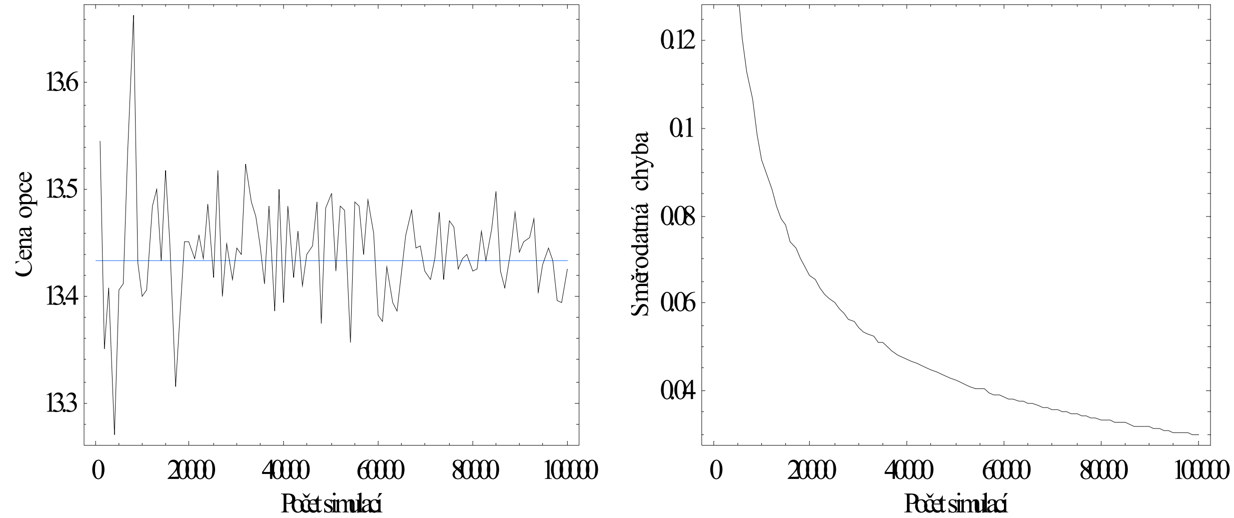
Verification of Quasi Monte Carlo option pricing method

The Monte-Carlo method is a powerful and flexible approach for providing numerical solutions to a large of complex problems in many fields of science. In recent years the Monte-Carlo method has been extensively used in computational finance and finance engineering. This paper is focused on modification of the Monte-Carlo method known as Quasi-Monte-Carlo approach. This method uses special deterministic sequences (quasi-sequences) rather than pseudo- or random sequences as in the Monte-Carlo. These quasi-random sequences are known as low-discrepancy sequences and have the property to be more evenly dispersed throughout a unit cube. In this paper are discussed Halton, Faure, Wozniakowski, Hammersley and Sobol quasi-random sequences. The theoretical aspects of the Quasi-Monte-Carlo method are confirmed by evaluation of the European plain-vanilla call options. The Qausi-Monte-Carlo results are compared with simple Monte-Carlo method and analytical Black-Scholes results. The results are also graphically presented.

Příloha 1

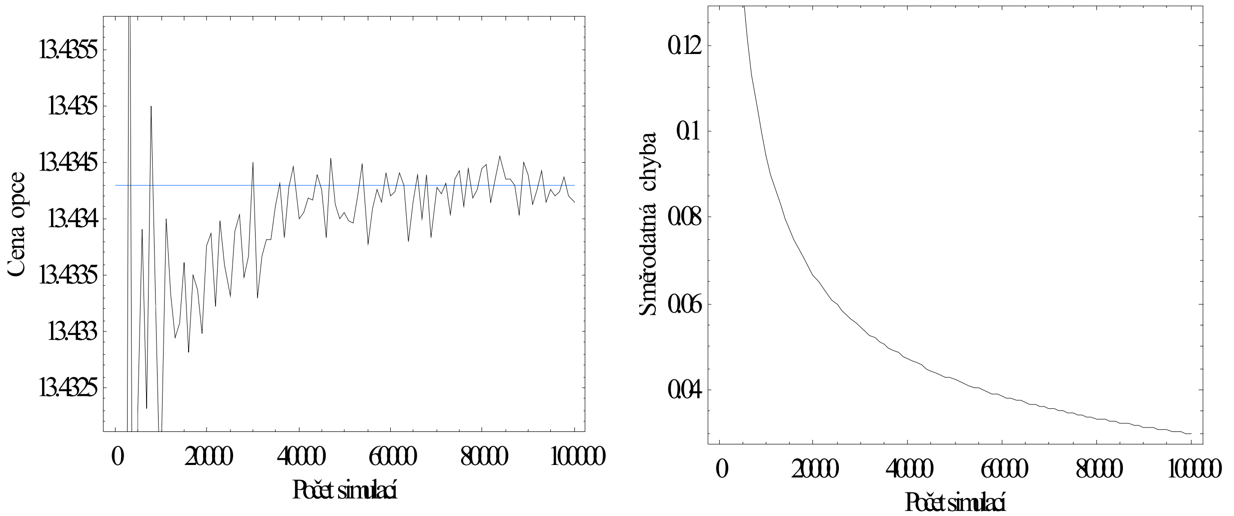
Obr. 3: Klasická metoda Monte-Carlo

(a) *(b)*



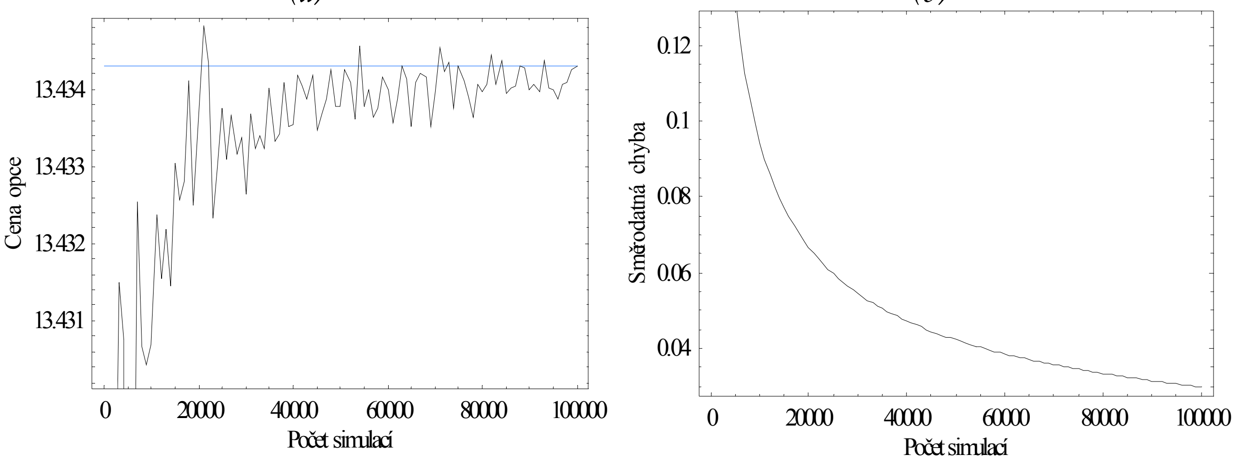
Obr. 4: Haltonova sekvence, dimense 1,2

(a) *(b)*



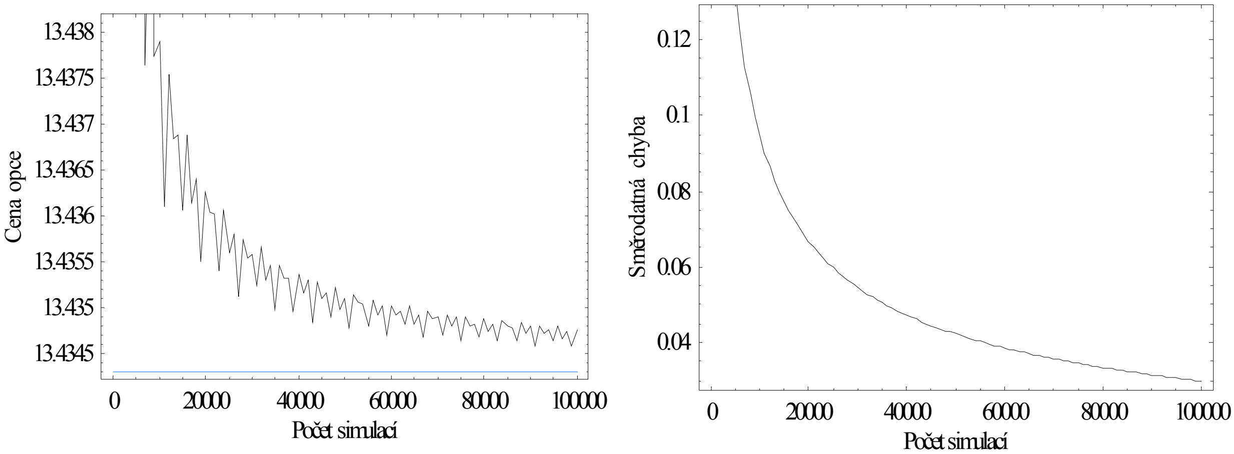
Obr. 5: Faureho sekvence, dimense 1,2

(a) *(b)*



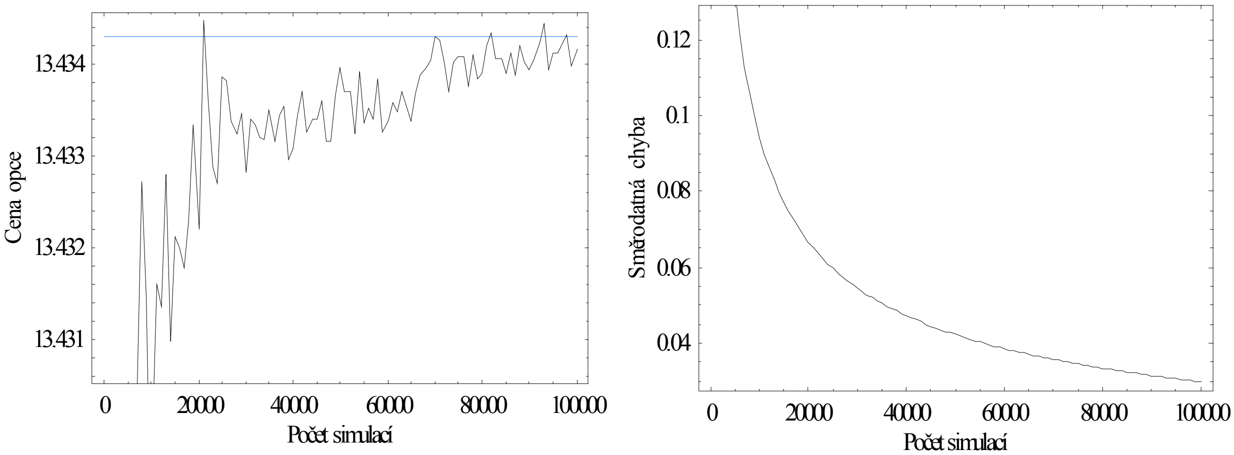
Obr. 6: Wozniakowskiho sekvence

(a) *(b)*



Obr. 7: Sobolova sekvence

(a) *(b)*



Obr. 8: Hammersleyho sekvence

(a) *(b)*