Determination Value at Risk via Monte Carlo simulation

Stanovení Value at Risk pomocí metody simulace Monte Carlo

Kateřina Zelinková [1]

Abstract

The financial institution, namely securities firms, banks and insurance company, commonly use simulation approaches, known as Monte Carlo methods. We can value complex derivatives and measure risk via this method. Monte Carlo method is used to simulate a variety of different scenarios for the portfolio value on the target date. Because of its flexibility, the simulation method is by far the most powerful approach to Value at Risk. The aim of paper is determined Value at Risk via Monte Carlo simulation for different significance level and for one day time horizon.

Key words

Value at Risk, simulation Monte Carlo, EWMA, Geometric Brownian Motion, Cholesky matrix

JEL Classification: C16, G22, G32

1. Úvod

Většina finančních institucí používá simulační techniky, známé jako metoda Monte Carlo. Simulace Monte Carlo je velmi flexibilní nástroj, který je aplikován ve financích. Většinou se daná metoda používá, pokud neexistuje analytické řešení problému. Simulace Monte Carlo se zabývá např. [1], [2], [4], [7].

Standardem pro měření a řízení tržních rizik je ukazatel hodnoty Value at Risk (*VaR*), jež kvantifikuje maximální ztrátu, která nebude se zvolenou pravděpodobností překročena v horizontu několika nejbližších dní. Problematika Value at Risk je popsána v celé řadě knih např. [1], [3], [5] a [6].

Cílem příspěvku je stanovit hodnotu Value at Risk pomocí metody Monte Carlo pro dané hladiny spolehlivosti za daný časový horizont. Stanovení VaR je provedeno na hladinách pravděpodobnosti 0,1 %, 0,5 %, 1 %, 5 % a 10 % a časový horizont je jeden den.

V první části příspěvky je krátce popsána metodologie Value at Risk, dále geometrický Brownův proces, pomocí něhož se vyvíjejí výnosy akcí a exponenciální vážený klouzavý průměr pro odhad kovarianční matice. Další část článku se zabývá aplikací uvedených metodologických postupů. Odhad Value at Risk je proveden na portfoliu, které je složeno z pěti akcií.

[1] VŠB-TU Ostrava, Faculty of Economics, Department of Finance, Sokolská tř. 33, 701 21, katerina.zelinkova.@vsb.cz.
Tento článek vznikl za finanční podpory v rámci projektu SGS SP2012/19.

2. Value at Risk

VaR je velmi rozšířené měřítko v oblasti řízení rizik. Používá se pro kvantifikaci tržního, pojistného, kreditního či operačního rizika. Výhodou tohoto kritéria je, že poskytuje jedno číslo, které shrnuje celkové riziko portfolia finančních aktiv a proto, si získal oblibu mezi manažery, zejména finančních institucí.

Ukazatel Value at Risk je definován jako nejmenší predikovaná ztráta na dané hladině pravděpodobnosti za daný časový interval. Také lze charakterizovat Value at Risk jako jednostranný interval spolehlivosti potencionálních ztrát hodnoty portfolia po danou dobu držení, což lze zapsat:

$$F(x) = P\left(X \le -VaR_{\alpha,\Delta t}(x)\right) = \alpha \tag{1}$$

kde $F(x)$ je distribuční funkce, α je hladina spolehlivosti and Δt je časový horizont.

Metoda Monte Carlo

Jedná se o metodu založenou na podobném základu jako historická simulace, její přístup je srovnatelný, avšak místo historických dat jsou generována data budoucí, hypotetická. Scénáře využívají určitého předpokladu o vývoji výnosu aktiva v budoucnosti. Základními údaji většinou bývá střední hodnota a rozptyl historických dat. Dále jsou simulovány náhodné vývoje hodnot portfolia pro většinou několik tisíc scénářů. Z této simulace je poté zjištěno reálné rozdělení pravděpodobnosti výskytu budoucích dat odhad Value at Risk.

2.1 Geometrický Brownův proces

Pro modelový popis jevů, jako jsou ceny akcií či výnosy, se nejčastěji používá geometrický Brownův proces. Tento proces je nejčastější praktickou aplikací Wienerova procesu. Podstatou procesu je měnění libovolné veličiny náhodným způsobem v čase. Je vhodný pro instrumenty s pevnými příjmy, neboť zde nejsou žádné cenové šoky a ceny se vyvíjejí náhodně. Brownův geometrický proces, u něhož se cena vyvíjí exponenciálním trendem, je určen následovně

$$dx = \alpha \cdot x + \sigma \cdot x \cdot dz \tag{2}$$

Aby byla patrná interpretace jednotlivých parametrů, a celého procesu lze Brownův proces zapsat jako

$$\frac{dx}{x} = \alpha.dt + \sigma.dz\,, \tag{3}$$

kde $\frac{dx}{x}$ je výnos aktiva α udává výnos aktiva za jednotkové období a σ udává směrodatnou odchylku výnosu za jednotkové období a dz je náhodná veličina z normovaného normálního rozdělení.

2.2 Ewma

Exponenciální váženy klouzavý průměr (EWMA) slouží pro odhad rozptylu a kovariance. Jedná se o zvláštní případ modelu GARCH s jedním parametrem λ. Daný parametr je odvozen z modelu GARCH, a platí pro něj, že se musí nacházet v rozmezí mezi 0 a 1, jak ukazuje následující rovnice

$$\varpi = 0,\ \alpha = 1 - \lambda,\ \beta = \lambda \text{ a tedy } 0 \le \lambda < 1.$$

Parametr λ je označován jako tlumící (decay) faktor.

Pro odhad kovariance platí následující vztah

$$\sigma^2_{ij;t+1,t} = (1-\lambda)\cdot r_{ij,t} + \lambda \cdot \sigma_{ij;t,t-1} \tag{4}$$

kde $\sigma_{ij,t+1,t}$ je předikovaná kovariance mezi aktivy *i* a *j*.

Parametr modelu lze odhadnout pomocí kritéria RMSE a to tak, že nejprve se určí chyba jako rozdíl předpovědi a skutečnosti a následně se minimalizuje kritérium RMSE

$$z_t = r_t^2 - \sigma^2_{t,t-1}$$
$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\sum_t z_t} \tag{5}$$

Model EWMA se používá pro stanovení Value at Risk a je doporučován právě přímo autory metody RiskMetrics. Díky tomu, že nejnovější pozorování má největší váhu, je EWMA lepším nástrojem předpovědi, než tradiční klouzavé průměry, jejichž váhy jsou fixní. Díky tomu je tento model schopen rychleji reagovat na změnu tržních dat a lépe zachytit následky významnějšího šoku na trhu.

Choleskeho matice

Vygenerované hodnoty, které představují budoucí vývoj výnosů jednotlivých instrumentů, jsou mezi sebou nezávislé. Aby do nich byla promítnuta závislost jednotlivých instrumentů, je potřeba použít postup tzv. Choleskeho dekompozice.

Základem je vypočtení korelační matice původních prvků a poté promítnutí této korelace do náhodných čísel. Principem výpočtu Choleskeho matice je rozložení kovarianční matice *C* na AA^T , kde prvky na hlavní diagonále Choleskeho matice A jsou vypočítány jako

$$A_{ii} = \sqrt{C_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}^2}\ , \tag{6}$$

kde C_{ii} jsou prvky kovarianční matice, A_{ik}^2 jsou prvky Choleskeho matice

Prvky nad hlavní diagonálou jsou vypočítány

$$A_{ij=}\frac{\left(C_{ii} - \sum_{k=i}^{i-1} A_{ik}A_{jk}\right)}{A_{ii}}. \tag{7}$$

3. Výsledky

V této části je odhadnuta hodnota pro Value at Risk pomocí metody Monte Carlo. Stanovení VaR je provedeno na hladinách pravděpodobnosti 0,1 %, 0,5 %, 1 %, 5 % a 10 % a časový horizont je jeden den. Předpokládá se, že podíl jednotlivých aktiv v portfoliu je stejný.

Odhad Value at Risk byl proveden pro lineární portfolio, které tvořilo 5 akciových titulů. Historické údaje jednotlivých aktiv jsou v období 31. 7. 2011 – 31. 7. 2012. V níže uvedené tabulce jsou základní charakteristiky jednotlivých titulů. Údaje jsou z RM – systému.

Tabulka 1: Základní charakteristiky

	$E(R_A)$	σ
AAA	-0,04806%	2,49%
ČEZ	-0,03423%	1,39%
KB	-0,06007%	1,80%
Microsoft	0,03042%	1,41%
Philips Morris	0,02435%	1,39%

Nejprve byla odhadnuta kovarianční matice pomoci modelu EWMA. Pro predikci kovariance se používají informace z historických časových řad výnosů. Jednotlivé výnosy u každého z aktiv byly zjištěný jako logaritmus dvou po sobě jdoucích cen aktiv. Výsledné hodnoty parametru spolu s hodnotami kovariance namodelovanými dle vztahu (4) jsou zobrazeny v níže uvedené tabulce Tabulka 2.

Tabulka 2: Kovarianční matice

	AAA	ČEZ	KB	Microsoft	Philips Morris
AAA	0,00060159	0,00009377	0,00008440	0,00020033	0,00003840
ČEZ	0,00009377	0,00825671	0,00013404	0,00015580	0,00006704
KB	0,00008440	0,00093002	0,00093002	0,00005834	0,00012498
Microsoft	0,00020033	0,00005834	0,00005834	0,01256937	0,00005321
Philips Morris	0,00003840	0,00012498	0,00012498	0,00416230	0,00078932

Vzhledem k tomu, že vygenerované hodnoty nejsou mezi sebou korelované, je důležité vnést závislost mezi náhodné proměnné pomocí Choleskeho matice. Výpočet byl proveden dle vztahu (6) a (7).

Tabulka 3: Choleskeho matice

	AAA	ČEZ	KB	Microsoft	Philips Morris
AAA	0,0245273	0,00382321	0,003440876	0,00816766	0,001565601
ČEZ	0	0,09078598	0,001331539	0,00655	0,127128607
KB	0	0	0,030496295	0,00191311	0,004098072
Microsoft	0	0	0	0,11211318	0,000114730
Philips Morris	0	0	0	0	0,028094875

Nyní se použije nástroj v MS Excel – *Generátor pseudonáhodných čísel* pro pokusů K = 1 000 a počet náhodných veličin 5, protože je v portfoliu pět akcií. Předpokládá se, že generované náhodné proměnné mají normální rozdělení. Nyní se promítne závislost mezi jednotlivé proměnné jako součin Choleskeho maticí s vygenerovanými náhodnými veličinami.

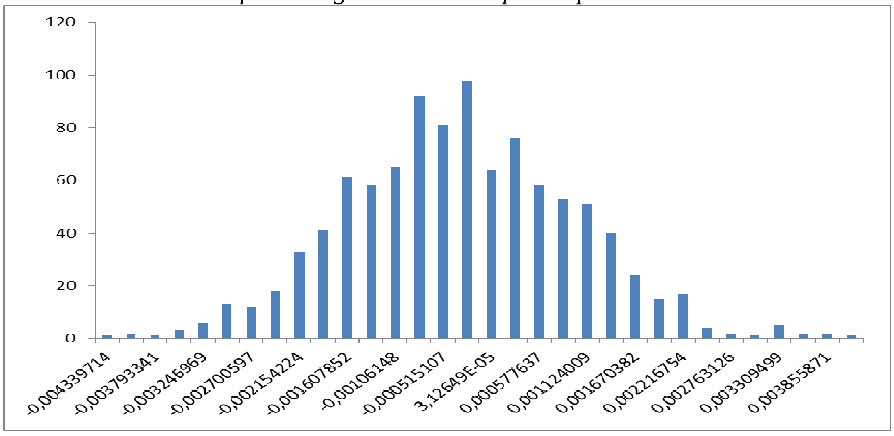
Následně se provede simulace výnosů jednotlivých akcií pomocí geometrického Brownova procesu, tedy dle vztahu (3), přičemž náhodná veličina z normovaného normálního rozdělení, je právě ta, v níž je promítnuta závislost jednotlivých instrumentů. Jedním z posledních kroků je zjistit výnos portfolia pro jednotlivé scénáře. Nakonec se zjistí hodnota Value at Risk jako daný kvantil rozdělení výnosů portfolia. Tabulka 4. ukazuje odhad hodnoty VaR pro jednotlivé hladiny pravděpodobnosti. Tedy při hladině pravděpodobnosti 0,1 % bude predikovaná ztráta větší nebo rovna -0,27 %, což znamená, že pokud bude investovaná částka do portfolia ve výši 1.000 Kč, bude ztráta rovna nebo větší než -2,7 Kč.

Tabulka 4: Odhad Value at Risk

$VaR_{0,1\%}$	$VaR_{0,5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{5\%}$	$VaR_{10\%}$
-0.27%	-0.20%	-0.19%	-0.14%	-0.11%

V níže uvedeném grafu je znázorněno rozdělení pravděpodobnosti výnosu portfolia, přičemž na ose x jsou hodnoty výnosů stanoveného portfolia a ose y je jejich četnost.

Graf 1:Histogram rozdělení pravděpodobnosti



4. Závěr

Předložený příspěvek je věnován problematice simulace Monte Carlo. Právě pomocí dané metody lze stanovit hodnota Value at Risk, která se používá zejména ve finančních institucích ke zjištění kapitálové přiměřenosti. Value at Risk představuje minimální ztrátu na dané hladině pravděpodobnosti za daný časový interval.

Aplikace dané problematiky byla provedena na výnosech z akcií, které jsou obchodovány na RM – systému. Nejprve se odhadla kovarianční matice pomocí exponenciálního klouzavého průměru – EWMA, ze které se následně odvodila Choleskeho matice. Vývoj jednotlivých instrumentů se vyvíjel dle geometrického Brownova procesu. Nakonec se vypočítal výnos portfolia pro jednotlivé scénáře a následně hodnota Value at Risk.

Literatura

[1] ALEXANDER, C.: 2008. *Value at Risk models.* Chichester, John Wiley& Sons Inc.

[2] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.–M., and HEATH, D.:1999.*Coherent Measures of Risk*. Mathematical Finance 9, 203–228.

[3] HOLTON, G. A.:2003. *Value-at-risk*: *theory and practice*. Boston: Academic Press.

[4] HULL, J. C. 2002. *Options, Futures and other Derivatives*. New Jersey, Pearson Education.

[5] HULL, J. C. 2007. *Risk management and Financial Institutions*. New Jersey, Pearson Education.

[6] JORION, P. 2007. *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. New York, McGraw-Hill.

[7] ZMEŠKAL, Z et al. 2004. *Financial models.*Ostrava, VŠB – TU.