Asian option pricing

Oceňovanie ázijských opcií

Lucia Švábová[1], Marek Ďurica [2]

Abstract

The paper deals with the determination of selected options prices using various numerical methods – the Monte Carlo method, The binomial trees method and Finite difference method and with the comparison of the price fixed by these numerical methods with the price set by an analytical formula. The basis for the price setting of any derivative instrument is the Black – Scholes partial differential equation. In the article we show how to use selected numerical methods for the particular type of Asian options whose underlying asset is a share without dividend. We also present the examples of the application of methods for the particular Asian option with the selected parameters. The results are always compared with the price set directly by the Black - Scholes formula.

Key words

European call option. Asian option. The Black – Scholes model. Binomical trees. Monte Carlo method. Finite difference method. Option pricing.

JEL Classification: C6

1. Úvod

Oceňovanie opcií na akcie a na iné finančné nástroje je veľmi dôležitou súčasťou obchodovania s derivátmi. Cena opcie musí byť správne stanovená, aby sa predišlo možným špekuláciám a arbitrážnym príležitostiam, ktoré predstavujú pre obchodníka bezrizikový zisk. Ázijské opcie sú špeciálnym typom exotických opcií, ktorých výplatná funkcia (payoff) závisí od priemernej ceny podkladového aktíva počas celej doby životnosti opcie. Cenu ázijskej opcie je možné numericky odhadnúť metódou binomických stromov, čo je univerzálna numerická metóda, použiteľná pre odhad ceny ľubovoľnej opcie. Vychádza z jednoduchej konštrukcie vývoja ceny podkladového aktíva (akcie), na ktoré sa opcia vzťahuje. Keďže u ázijskej opcie je hodnota výplatnej funkcie závislá od priemernej ceny podkladovej akcie počas celej doby životnosti kontraktu, pri konštrukcii binomického stromu je potrebné vziať do úvahy aj spôsob vývoja ceny podkladového aktíva. Inou metódou, ktorá sa dá použiť na oceňovanie ázijských opcií je metóda Monte Carlo. Cenu ázijskej opcie pri tejto metóde stanovíme pomocou Black – Scholesovho vzorca, pričom použijeme opakované simulácie

[1] RNDr. Lucia Švábová, Katedra kvantitatívnych metód a hodpodárskej informatiky, Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov, Žilinská univerzita v Žiline, e-mail: lucia.svabova@fpedas.uniza.sk
[2] RNDr. Marek Ďurica, PhD., Katedra kvantitatívnych metód a hodpodárskej informatiky, Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov, Žilinská univerzita v Žiline, e-mail: marek.durica@fpedas.uniza.sk
Článok bol publikovaný na podporu inštitucionálneho výskumu s názvom Finančná matematika pre každého, číslo projektu 5/ KMaHI /2012.

vývoja ceny podkladovej akcie. Treťou alternativou numerického stanovenia ceny opcie je metóda konečných diferencií, ktorej základom je tiež Black – Scholesov model. Táto metóda spočíva v zúžení oboru riešenia len na konečný počet bodov a v nahradení parciálních derivácií v Black – Scholesovom modeli danými diferenciami. Tým dostáváme sústavu rovníc, riešenie získáme iteračnou metodou.

Black – Scholesov model oceňovania opcií je dnes najpoužívanejším nástrojom na stanovenie ceny derivátu. Ceny, vypočítané pomocou tohto modelu, sú prakticky totožné so skutočnými cenami derivátov na finančných trhoch. Článok uvádza porovnanie ceny ázijskej opcie stanovenej pomocou metódy binomických stromov, metódy Monte Carlo, Metódy konečných diferencií a priamo pomocou Black – Scholesovho analytického vzorca pre cenu ázijskej opcie.

2. Základné pojmy

Finančný derivát je finančný nástroj, ktorého hodnota závisí na hodnote iného, podkladového finančného aktíva (napr. na hodnote akcie, burzového indexu, výmenného kurzu). *Opcia* je finančný derivát, ktorý dáva jej vlastníkovi právo kúpiť (predať) dané podkladové aktívum (napr. akciu) v danom čase T v budúcnosti za vopred dohodnutú cenu X. Vyrovnanie opcie nie je povinné, opcia môže vypršať bez uplatnenia. Call opcia je kúpna opcia, zaisťuje vlastníkovi právo na kúpu podkladového aktíva (akcie). Put opcia je predajná opcia, dáva vlastníkovi právo predať aktívum. [3]

Ázijská opcia je exotická opcia, ktorej výplatná funkcia (payoff) závisí od priemernej ceny podkladového aktíva (akcie), dosiahnutej počas celej doby životnosti opcie. Existujú dva druhy ázijských opcií:

- *average price opcia* s priemernou cenou, jej payoff je vyjadrený rozdielom priemernej ceny v období od dohodnutia kontraktu až po jeho vysporiadanie a dohodnutej realizačnej ceny:
  - výplatná funkcia average price call opcie je $c = \max(S_{avg} - X, 0)$,
  - výplatná funkcia average price put opcie je $p = \max(X - S_{avg}, 0)$,
- *average strike opcia* s priemernou exspiračnou cenou, jej payoff je vyjadrený rozdielom priemernej ceny v období od dohodnutia kontraktu až po jeho vysporiadanie a spotovej ceny aktíva v čase realizácie:
  - výplata z average strike call opcie je $c = \max(S_T - S_{avg}, 0)$,
  - výplata z average strike put opcie je $p = \max(S_{avg} - S_T, 0)$.

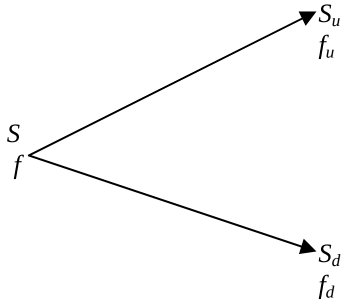
Pri všetkých uvedených typoch môže byť priemerná cena S_{avg} počítaná pomocou geometrického alebo pomocou aritmetického priemeru.

2.1 Oceňovanie opcií metódou binomických stromov

Binomické stromy sú veľmi používanou numerickou metódou na oceňovanie opcií alebo iných finančných derivátov. Veľkou výhodou tejto metódy je jej univerzálnosť, pomocou binomických stromov sa dá oceniť ľubovoľný finančný derivát. Takisto je možné pomocou tejto metódy oceňovať aj deriváty na akciu poskytujúcu dividendy a *path – dependent deriváty*, čo sú deriváty, u ktorých výplatná funkcia závisí od cesty, ktorou sa vyvíjala cena akcie počas doby životnosti derivátu. Takým je aj ázijská opcia. Binomický strom reprezentuje možný vývoj ceny podkladovej akcie počas trvania kontraktu. V modeli pracujeme s diskrétnym časom, teda predpokladáme zmenu ceny akcie vždy po uplynutí časového obdobia Δt.

Nech počiatočná cena akcie je S. Binomický model predpokladá, že S môže po časovom kroku Δt len vzrásť na hodnotu $S_u = S \cdot u$ alebo poklesnúť na hodnotu $S_d = S \cdot d$, pričom u je koeficient vzrastu, d je koeficient poklesu. Túto situáciu znázorňuje jednokrokový binomický strom na Obrázku 1. Nech f_u je cena derivátu akcie pri vzraste akcie na hodnotu S_u a f_d je cena derivátu akcie pri poklese ceny akcie na S_d. Túto cenu pri ázijských opciách stanovíme pomocou ich už uvedených payoff funkcií, pričom S_{avg} je priemerná cena podkladového aktíva (akcie), dosiahnutá počas doby životnosti derivátu.

Obrázok 1: Jednokrokový binomický model



Cena derivátu, stanovená pomocou binomického stromu, je

$$f = e^{-r\Delta t}\left(p \cdot f_u + (1-p) \cdot f_d\right),$$

pričom číslo $p = \dfrac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$ predstavuje pravdepodobnosť nárastu ceny akcie, číslo $1 - p$ je pravdepodobnosť poklesu ceny akcie[3].

Tento jednokrokový binomický model sa dá jednoduchým spôsobom rozšíriť na viackrokový, pričom uvedené vzťahy zostávajú v platnosti. Pomocou nich sa dá oceniť ľubovoľný derivát európskeho typu.

2.2 Black – Scholesov model oceňovania opcií

Black – Scholesov model môže byť použitý na ocenenie európskych opcií na akcie, na ktoré nie sú vyplácané dividendy. Podľa Blacka a Scholesa stanovenie výšky ceny opcie vychádza z niekoľkých predpokladov:

1. Cenu akcie môžeme popísať geometrickým Brownovým pohybom s konštantnými parametrami μ očakávaná miera návratnosti akcie) a σ (miera neistoty, rizika, pri určovaní výnosnosti akcie, volatilita ceny akcie).
2. Je možný predaj nakrátko s plným využitím výnosu (nie je potrebné žiadne krytie). Predaj akcie nakrátko znamená, že si „požičiame“ akciu od niekoho, kto ju vlastní a predáme ju. Neskôr túto akciu kúpime a „vrátime“ majiteľovi. Pri takomto obchodovaní sa v praxi vyžaduje peňažné krytie ako záruka za pôžičku.
3. Transakčné náklady a dane sú nulové. Všetky cenné papiere sú ľubovoľne deliteľné.
4. Akcia neposkytuje počas životnosti derivátu žiadne dividendy.
5. Neexistuje príležitosť pre arbitráž.
6. Obchodovanie s cennými papiermi je spojité.
7. Bezriziková úroková miera r je konštantná a rovnaká pre všetky doby viazanosti. [5]

Za uvedených predpokladov platí *Black – Scholesova parciálna diferenciálna rovnica*

$$r\,f = \frac{\partial f}{\partial t} + rS\,\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

[3] Hodnoty pravdepodobností sú odvodené na základe vytvorenia bezrizikového portfólia, pozri [1].

Táto rovnica má nekonečne veľa riešení, ktoré závisia od zvolených počiatočných podmienok. Riešením Black – Scholesovej rovnice pre cenu európskej call opcie je vzorec

$$c = S\,N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2).$$

Pritom N(d_1) a N(d_2) sú hodnoty rozdelenia pravdepodobnosti normovanej normálnej náhodnej premennej v bodoch d_1 a d_2, ktoré sú dané

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.[1]$$

2.2.1 Black – Scholes – Mertonov model

Závažným problémom uvedeného Black – Scholesovho modelu je abstrahovanie od vyplácania dividend (tento model predpokladá, že akcia počas doby životnosti derivátu nevypláca žiadne dividendy – predpoklad 4). V podmienkach fungujúceho trhového hospodárstva je však vyplácanie dividendy bežné, preto je vhodné túto skutočnosť zahrnúť do predpokladov modelu. Týmto problémom sa v najväčšom rozsahu zaoberal Robert Merton, ktorý do konštrukcie svojho modelu zahrnul aj predpoklad, že podkladová akcia vypláca spojitý dividendový výnos počas životnosti opcie. Black – Scholes – Mertonova diferenciálna rovnica má tvar

$$r\,f = \frac{\partial f}{\partial t} + (r-q)S\,\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}.$$

Jej riešenie spočíva v tom, že v Black – Scholesovom modeli nahradíme cenu akcie S zníženou cenou $Se^{-q(T-t)}$. Tým dostaneme Black – Scholes – Mertonov vzorec pre oceňovanie európskych opcií na akciu, ktorá prináša výnos (dividendu) vo výške q % p.a.:

$$c = Se^{-qt}N(d_1) - Xe^{-rt}N(d_2),$$

pričom

$$d_{1,2} = \frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r - q \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

kde q je spojitý dividendový výnos vyplácaný v % z ceny akcie.

2.2.2 Black – Scholes – Mertonove vzorce pre Ázijské opcie

Pri oceňovaní ázijských opcií pomocou Black – Scholes – Mertonovho modelu musíme rozlišovať, aký druh priemeru sa používa pri ich oceňovaní. Aritmetický priemer je totiž odlišný od geometrického priemeru. Hlavný rozdiel spočíva v rozdelení: geometrický priemer má pri lognormálnom rozdelení cien podkladového aktíva taktiež lognormálne rozdelenie, avšak aritmetický priemer takéto rozdelenie pri lognormálnom rozdelení cien nemá. Rovnica pre geometrické ázijské opcie je preto priamym rozšírením Black – Scholes – Mertonovej rovnice, zatiaľ čo u aritmetických ázijských opcií je takéto analytické riešenie veľmi ťažké dosiahnuť. [1]

Ak cena podkladového aktíva S je lognormálne rozdelená (t.j. logaritmy cien aktíva sú normálne rozdelené náhodné premenné) a S_{avg} je geometrický priemer cien S, potom je možné európsku average price opciu oceniť pomocou analytických vzorcov.

V rizikovo – neutrálnom svete to znamená, že ak očakávaná miera rastu je rovná $\frac{\left(r-q-\frac{\sigma^2}{6}\right)}{2}$ (namiesto $r-q$, ktoré sa používa v Mertonovom modeli) a volatilita je vyjadrená

$\frac{\sigma}{\sqrt{3}}$ (namiesto σ), tak cena geometrickej average price opcie môže byť vyjadrená ako cena bežnej európskej opcie, avšak s volatilitou $\frac{\sigma}{\sqrt{3}}$ a poskytujúca dividendový výnos $r-\frac{\left(r-q-\frac{\sigma^2}{6}\right)}{2}=\frac{\left(r+q+\frac{\sigma^2}{6}\right)}{2}$.

Väčšinou sú však ázijské opcie definované pomocou aritmetických priemerov a vtedy nie je možné použiť analytické vzorce pre oceňovanie. Je to preto, lebo aritmetický priemer dáva také rozdelenie pravdepodobnosti, ktoré nie je použiteľné. Pre takéto opcie sa potom používa aproximácia, pomocou ktorej sa dá vypočítať aj cena ázijskej opcie s aritmetickým priemerom. Táto aproximácia spočíva v tom, že vypočítame prvé dva momenty rozdelenia aritmetického priemeru M_1 a M_2 a potom predpokladáme, že toto rozdelenie aritmetického priemeru je lognormálne s rovnakými prvými dvoma momentmi M_1 a M_2:

$$M_1=\frac{e^{(r-q)T}-1}{(r-q)T}$$

$$M_2=\frac{2e^{\left(2r-2q+\sigma^2\right)T}}{\left(r-q+\sigma^2\right)\cdot\left(2r-2q+\sigma^2\right)T^2}+\frac{2}{(r-q)T^2}\left[\frac{1}{\left(2r-2q+\sigma^2\right)}-\frac{e^{(r-q)T}}{\left(r-q+\sigma^2\right)}\right]$$

Pomocou tejto aproximácie môžeme vyjadriť aritmetickú average price call opciu ako bežnú opciu s dividendovým výnosom

$$q_A=r-\frac{\ln M_1}{t}$$

a volatilitou

$$\sigma_A^2=\frac{\ln M_2}{t}-2(r-q_A).$$

2.3 Oceňovanie opcií metódou Monte Carlo

Metóda Monte Carlo je v matematike veľmi používanou numerickou metódou. Pomocou tejto metódy vytvoríme simulácie vývoja ceny podkladovej akcie, na ktorú je viazaný derivát a na základe týchto simulácií odhadneme cenu zodpovedajúceho derivátu – opcie.

Najbežnejším použitím metódy Monte Carlo vo financiách je výpočet očakávanej hodnoty nejakej funkcie s danou hustotou pravdepodobnosti. Pri simulácii vývoja ceny akcie a stanovení ceny zodpovedajúcej opcie pre túto akciu budeme postupovať takto:

- Zvolíme počiatočnú cenu akcie *S*, realizačnú cenu opcie *X*, očakávanú návratnosť μ, volatilitu σ, dĺžku časového kroku Δt,
- vyberieme náhodnú realizáciu pre cenu akcie *S*: $S_0, S_{\Delta t}, S_{2\Delta t}, ..., S_T$ na základe jej známeho rozdelenia pravdepodobnosti,
- vypočítame cenu zodpovedajúcej opcie pri takomto vývoji ceny akcie,
- opakujeme potrebný počet krát,
- z výsledných cien derivátov vypočítame priemer a diskontujeme ho do času 0.

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\frac{\Delta S}{S}$, kde ΔS je zmena ceny akcie za krátky časový interval Δt, odvodíme na základe teórie stochastických procesov[4]. Ak μ je očakávaná návratnosť akcie σ je miera rizika návratnosti, potom $\frac{\Delta S}{S}$ je normálne rozdelená náhodná premenná so strednou hodnotou $\mu\Delta t$ a štandartnou odchýlkou $\sigma\sqrt{\Delta t}$, teda

[4] pozri napríklad v [1]

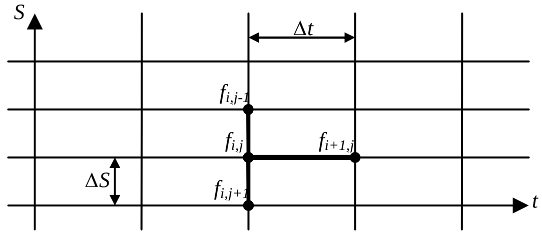
$$\frac{\Delta S}{S} \sim N\left(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}\right).$$

Chybu v Monte Carlo simulácii stanovíme ľahko, stačí porovnať priemernú cenu call opcie získanú z posledného kroku s cenou vypočítanou z počiatočnej ceny akcie.

2.4 Oceňovanie opcií metódou konečných diferencií

Black – Scholesova rovnica je parciálna diferenciálna rovnica platná na celom definičnom obore riešenej problematiky. Jej riešenie sa však podstatne zjednoduší, ak definičný obor zúžime len na konečný počet bodov, čo je podstatou metódy konečných diferencií. Tieto body zvolíme tak, že zadefinujeme v súradnicovej sústave čiary rovnobežné s osami súradnicovej sústavy. Tie sa budú pretínať v uzloch siete, riešenie rovnice budeme hľadať len v týchto sieťových bodoch. Výsledná hodnota v jednotlivých bodoch je ovplyvnená hodnotami v najbližších susedných uzloch v smere osi *x* aj *y*. Základom algoritmu výpočtu pomocou metódy konečných diferencií je nahradenie parciálnych derivácií v Black – Scholesovej diferenciálnej rovnici danými diferenciami. Situáciu znázorňuje nasledujúci obrázok. [4]

Obrázok 2: Sieť deliacich bodov pre metódu konečných diferencií



V krajných bodoch siete sú hodnoty opcie známe; v čase $t = T$ bude hodnota call opcie daná jej payoff funkciou, kde $S_j = j \cdot \Delta S,\ j = 0,1,\ldots,n$ je cena pokladovej akcie v sieťových bodoch. Pre akciu s nulovou cenou má opcia hodnotu 0, hodnoty v ostatných bodoch závisia od hodnôt v susedných bodoch siete.

Pomocou daných aproximácií parciálnych derivácií v Black – Scholesovej rovnici transformujeme túto diferenciálnu rovnicu na sústavu diferenčných rovníc. Ako riešenie dostaneme hodnoty ceny derivátu v čase 0. Rozlišujeme dva základné spôsoby výpočtu pomocou metódy konečných diferencií, v závislosti od použitých aproximácií, a to implicitnú a explicitnú metódu.

Implicitná metóda konečných diferencií používa aproximácie, ktoré po dosadení do Black–Scholesovej diferenciálnej rovnice a úprave dávajú sústavu rovníc pre hodnoty derivátu v neznámych bodoch siete. Pritom využívame hodnotu tých najbližších bodov siete, v ktorých je cena derivátu známa. Riešením sústavy sú ceny derivátu v požadovaných bodoch siete, opakovaním tohto postupu dostávame ceny v čase 0. *Explicitná metóda* konečných diferencií používa pre zjednodušenie výpočtu také aproximácie parciálnych derivácií, po dosadení ktorých do Black – Scholesovej diferenciálnej rovnice a úprave, sa dá z každej rovnice priamo vypočítať cena derivátu v danom bode:

$$f_{i,j} = \frac{2(\Delta S)^2 f_{i+1,j} + \Delta t \Delta S r S_j \left(f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}\right)}{2r\Delta t(\Delta S)^2 + 2(\Delta S)^2} + \frac{\sigma^2 S_j{}^2 \Delta t\left(f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2 f_{i+1,j}\right)}{2r\Delta t(\Delta S)^2 + 2(\Delta S)^2}.$$

Táto rovnica platí pre klasickú európsku call opciu s podkladovou akciou, ktorá neprináša počas doby životnosti opcie žiadny výnos. V prípade opcie na akciu, ktorá prináša spojitý dividendový výnos daný v percentách z ceny akcie, použijeme už spomínaný Black – Scholes – Mertonov model. Explicitný vzorec pre výpočet hodnoty opcie musíme upraviť znížením úrokovej miery na hodnotu $r - q$, teda dostávame

$$f_{i,j} = \frac{2\Delta S^2 f_{i+1,j} + \Delta t \Delta S (r-q) S_j \left(f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} \right) + \sigma^2 S_j^{\,2} \Delta t \left(f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2 f_{i+1,j} \right)}{2r\Delta t \Delta S^2 + 2\Delta S^2}$$

Ako bolo už spomenuté vyššie, ázijská average price opcia sa dá pomocou určitej aproximácie oceniť rovnako ako európska call opcia s podkladovou akciou prinášajúcou spojitý dividendový výnos. Túto skutočnosť využijeme pri aplikovaní metódy konečných diferencií na odhad ceny ázijskej opcie.

Vo výpočtoch, uvedených v časti 3.4 budeme používať explicitnú metódu, čiže cenu opcie so zvolenými parametrami v každom vnútornom bode siete vypočítame podľa predchádzajúceho vzorca.

3. Príklady stanovenia ceny vybranej opcie

3.1 Príklad oceňovania ázijskej opcie pomocou binomického stromu

Na nasledujúcom príklade ukážeme spôsob oceňovania ázijských opcií pomocou metódy binomických stromov. Použijeme 4 – krokový model s časovým úsekom dĺžky $\Delta t = 0{,}1$ roka. Keďže ázijské opcie sú „path – dependent“, ich cena je závislá na ceste, ktorou sa vyvíjala cena akcie počas celej ich doby životnosti. U týchto opcií teda musíme zohľadniť aj to, ktorou cestou sa cena akcie do koncového uzla v strome dostala, pretože hodnota derivátu v čase expirácie závisí od priemeru hodnôt podkladovej akcie počas celej doby jej životnosti. Hodnoty opcie sa v závislosti od cesty líšia, preto je potrebné strom rozšíriť.

Nech počiatočná cena akcie je S = 105, realizačná cena opcie je X = 100, bezriziková úroková miera je stanovená na r = 8 % p.a., koeficient rastu je u = 1,1 a koeficient poklesu je d = 0,9. Potom hodnota pravdepodobnosti nárastu ceny akcie je $p = 0{,}5402$ a hodnota pravdepodobnosti poklesu ceny akcie je 1 – p = 0,4598. Nech daná ázijská opcia je typu average price call, teda hodnoty v koncových uzloch stromu určíme podľa jej príslušnej payoff funkcie, priemer cien nech je aritmetický. Ďalej pokračujeme v strome smerom sprava doľava podľa vzorcov, uvedených v časti 2.1, vypočítané hodnoty sú uvedené na Obrázku 2.

Cena uvedenej aritmetickej average price call opcie bola binomickým modelom stanovená na c = 8,8116. Je zrejmé, že pri použití stromu s viacerými krokmi na kratších časových intervaloch by bol tento odhad ceny opcie presnejší. Keďže však ide o opciu závislú od cesty, výpočtová náročnosť sa každým krokom v binomickom strome zvyšuje, nakoľko pridaním ďalšieho kroku v strome sa zvyšuje počet bodov stromu v čase expirácie opcie dvojnásobne. Pre porovnanie s nasledujúcimi metódami uvedieme ešte, že ak by cena S_{avg} bola počítaná pomocou geometrického priemeru, tak cena zodpovedajúcej call opcie by bola pomocou binomického stromu stanovená na c = 8,5066.

3.2 Príklad oceňovania ázijskej opcie Metódou Monte Carlo

Nech počiatočná cena akcie je S = \$105, realizačná cena opcie je X = \$100, očakávaná návratnosť akcie je $\mu = 0{,}10$, volatilita je $\sigma = 0{,}3$, bezriziková úroková miera je r = 0,08. Dĺžku časového kroku zvolíme $\Delta t = 0{,}0004$ (4 časové kroky dĺžky 0,1, ktoré sme použili v binomickom strome, rozdelíme na 1000 krokov v jednej simulácii). Simuláciu opakujeme 1000 krát. Nech oceňovaná opcia je aritmetická average price call.

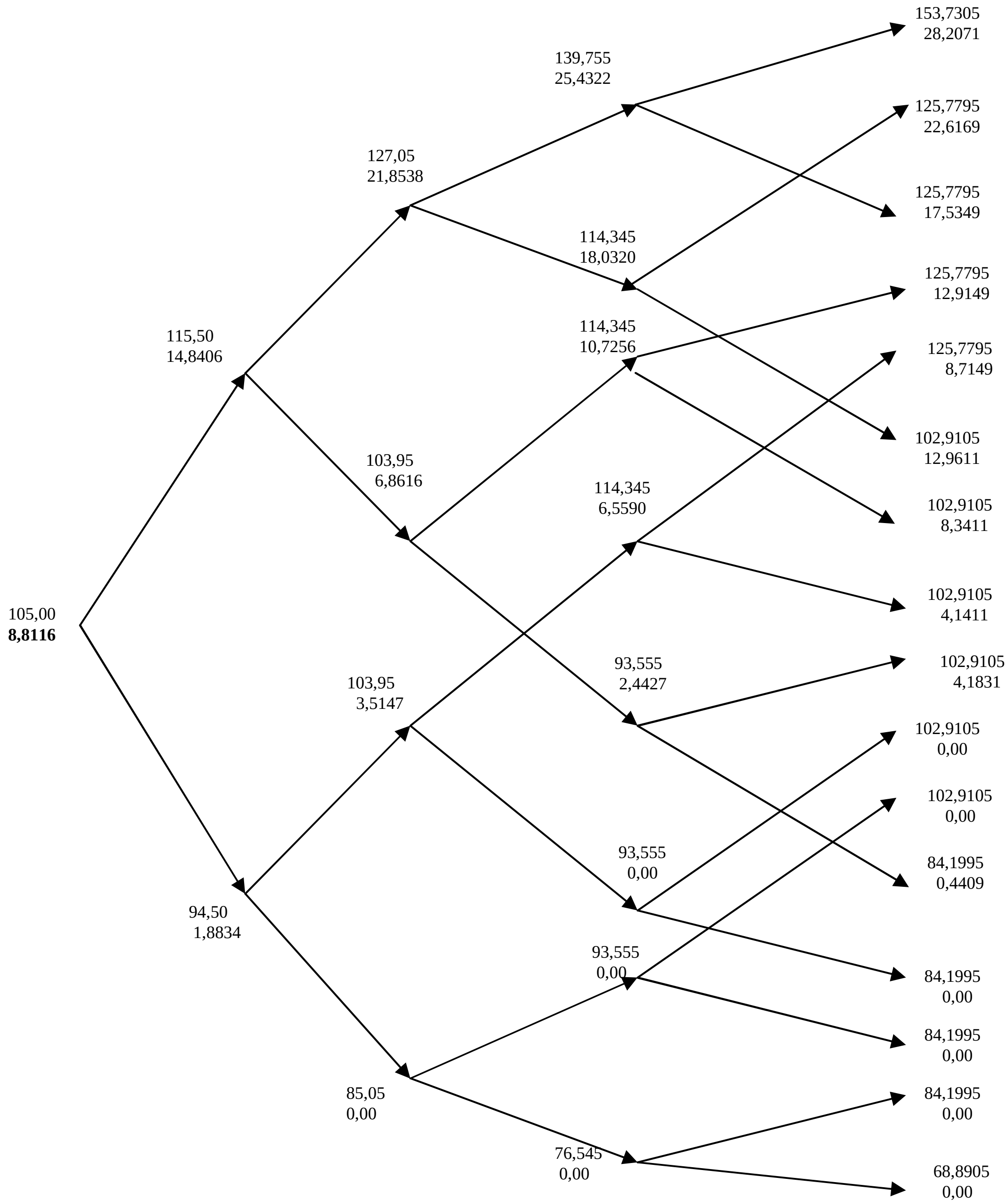
Priemer (stredná hodnota) z takto vypočítaných cien opcie je c = 8,6343, tento priemer diskontujeme do času 0. Dostávame Monte Carlo odhad ceny opcie c = 8,3624.

Chybu Monte Carlo metódy vypočítame $s = \frac{\omega}{\sqrt{M}}$, kde ω je štandardná odchýlka odhadov cien call opcie získaných zo simulácií a M je počet opakovaní simulácie, v našom príklade M = 1000. V tomto prípade výstupu dostávame chybu s = 0,00895.

Pre porovnanie ešte uvedieme príklad ocenenia geometrickej average price opcie s rovnakými parametrami. Tu dostávame c = 8,1137 s chybou s = 0,0092.

V oboch prípadoch je nutné poznamenať, že tieto ceny sú len odhadom skutočnej ceny danej ázijskej opcie, nakoľko vychádzajú zo simulácií vývoja ceny podkladovej akcie, teda pri novej simulácii bude odhad ceny odlišný.

Obrázok 3: Binomický strom európskej aritmetickej average price call opcie (v strome je horná hodnota vždy cena akcie a dolná cena opcie)



3.3 Výpočet ceny ázijskej opcie pomocou Black – Scholes – Mertonovho vzorca

Majme tú istú average price call opciu s podkladovou akciou bez dividend (teda q = 0), pričom volatilita je $\sigma = 0{,}3$ a čas do splatnosti je t = 0,4, čo zodpovedá 4 časovým úsekom dĺžky 0,1 v binomickom modeli.

Ak priemer je geometrický, môžeme túto opciu oceňovať ako klasickú európsku call opciu, pričom použijeme hodnotu volatility $\tilde{\sigma} = 0{,}1732$ a namiesto dividendového výnosu q = 0 použijeme $\tilde{q} = 0{,}0475$. Po dosadení všetkých hodnôt do Black – Scholes – Mertonovho vzorca dostávame cenu príslušnej average price call opcie c = 8,13.

V prípade aritmetického priemeru použijeme aproximáciu pomocou prvých dvoch momentov rozdelenia. Vypočítame prvé dva momenty M_1 = 1,0162 a M_2 = 1,0452 a tiež dividendový výnos q_A = 0,0399 a volatilitu $\sigma_A^2 = 0{,}0303$ pomocou vzťahov uvedených v časti 2.2.2. Pomocou týchto hodnôt dostaneme výslednú cenu tejto average price call opcie c = 8,3768.

3.4 Príklad oceňovania ázijskej opcie Metódou konečných diferencií

Použijeme ešte raz predchádzajúci príklad s hodnotami X = \$100, r = 0,08, $T = 0{,}4$, $S_{\max} = 210$. Nech priemer, používaný pri výpočte, je geometrický. Rovnako ako v predchádzajúcej časti použijeme hodnoty volatility $\tilde{\sigma} = 0{,}1732$ a dividendového výnosu $\tilde{q} = 0{,}0475$. Chceme vypočítať cenu opcie v bode S = \$105. Pri delení intervalu času na 2 časti a intervalu ceny akcie na 4 časti, ako je uvedené na obrázku 2, dostávame cenu ázijskej call opcie so zvolenými parametrami c = 6,6554. Pre spresnenie výsledku použijeme podrobnejšie delenie, interval ceny akcie rozdelíme na 100 častí a interval času rozdelíme tiež na 100 častí. Pri tejto hustejšej sieti deliacich bodov dostaneme cenu opcie v požadovanom bode c = 8,1216. Tento odhad ceny je už dosť blízky skutočnej cene, ktorú sme dostali z Black – Scholesovho – Mertonovho vzorca.

V prípade aritmetického priemeru použijeme už vyššie uvedenú aproximáciu dividendového výnosu q_A = 0,0399 a volatility $\sigma_A^2 = 0{,}0303$. Pri delení intervalu času aj intervalu ceny akcie na 100 častí dostávame cenu ázijskej opcie c = 8,3772. Všetky tieto hodnoty boli vypočítané pomocou programov, vytvorených autormi v programovacom jazyku C, ktoré umožňujú stanoviť cenu call opcie s rôznymi hodnotami vstupných parametrov X, r, σ, T, S_{max}, q a s rôznym delením časového intervalu aj intervalu ceny akcie.

4. Záver

V predchádzajúcom texte sme uviedli možné spôsoby oceňovania ázijských opcií, ktoré sú veľmi populárne, pretože pri určovaní ceny aktíva sú menej náchylné na možnú manipuláciu a ich cena je vo všeobecnosti menej kolísavá ako u klasických opcií. V dôsledku toho ponúkajú tieto opcie lacnejší spôsob zaistenia sa proti riziku zmeny ceny aktíva ako klasické opcie. Na ocenenie takýchto opcií sa dá použiť binomický strom, ktorý je univerzálnou metódou na oceňovanie všetkých opcií, vrátane path – dependent, akou je aj ázijská opcia. Na príklade sme ukázali ocenenie average price call opcie pomocou 4 – krokového stromu. Druhou numerickou metódou na ocenenie ázijskej opcie môže byť metóda Monte Carlo, ktorá na základe opakovaných simulácií možného vývoja ceny podkladovej akcie odhaduje cenu zodpovedajúcej ázijskej call opcie. Ďalej sme uviedli ocenenie rovnakej opcie pomocou metódy konečných diferencií. Nakoniec sme vypočítali cenu priamo pomocou Black – Scholes – Mertonovho modelu s modifikovanými parametrami σ a $r - q$ pre prípad geometrického priemeru, prípadne s modifikovanými prvými dvoma momentmi v prípade aritmetického priemeru. Nasledujúca tabuľka uvádza porovnanie cien, získaných z uvedených štyroch postupov, pre aritmetickú a geometrickú average price ázijskú opciu.

Tabuľka 1: Porovnanie cien average price call opcie stanovených podľa rôznych metód

	Aritmetická average price opcia	Geometrická average price opcia
Monte Carlo	8,3624	8,1137
Binomický strom	8,8116	8,5066
Black – Scholesov model	8,3768	8,13
Metóda konečných diferencií	8,3772	8,1216

Porovnaním výsledkov môžeme konštatovať, že ceny vypočítané pomocou týchto modelov sú podobné, ale nie celkom rovnaké, hlavne tie, získané pomocou binomického stromu. To je zrejme spôsobené použitím menšieho počtu časových krokov s dĺžkou 0,1 v binomickom modeli. Je zrejmé, že čím viac časových krokov menšej dĺžky použijeme, tým budú výsledky presnejšie. S použitím väčšieho počtu krokov však narastá časová náročnosť výpočtu, pretože s rastúcim počtom krokov sa zvyšuje počet bodov v nasledujúcom kroku v strome, pri ázijskej opcii dvojnásobne.

References

[1] Hull, J.C., 1997. *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall. New York, 3rd edition.

[2] Demjan, V., 2007. *Black - Scholesov model oceňovania opcií*. In Finančné trhy. Derivat s.r.o., Bratislava

[3] Chovancová, B., Jankovská, A., Šturc, B., Kotlebová, 2002. *Finančný trh: nástroje, transakcie, inštitúcie*, Eurounion. Bratislava, 2. vydanie.

[4] Lucová, M., 2002. *Numerické metódy oceňovania derivátov úrokovej miery*, diplomová práca. Univerzita Komenského, Bratislava.

[5] Merton, R.C., 1973. *Theory of Rational Option Pricing*. In The Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, No. 1. Springer Redman, P., 2006. Good essay writing: a social sciences guide. 3rd ed. London: Open University in assoc. with Sage.