

Modeling and in-sample forecasting of volatility using linear and nonlinear models of conditional heteroscedasticity

Modelování a ex-post predikce volatility pomocí lineárních a nelineárních modelů podmíněné heteroskedasticity

Petr Sed'a¹

Abstract

This paper deals with estimates of volatility using selected linear and nonlinear models of conditional heteroskedasticity which are able to account for the main empirical features observed in data on equity markets. The aim of this paper is to compare in-sample forecasting performance of volatility models in selected time periods with a special emphasis on the time of the global financial crisis. There are at first described the selected ways of volatility approximation and further characterized linear and nonlinear models of conditional heteroscedasticity. The empirical analysis has been applied on the daily returns of both developed (USA, Great Britain) and emerging (Czech Republic, Poland) equity markets in the years 2004-2012. Estimates obtained using volatility models are compared with the real values of volatility on the basis of loss functions as indicators of forecasting quality in different time periods. It seems that worst results were achieved when analyzing data from the global financial crisis period. In addition, the forecasting performance of used models is generally better on developed equity markets represented by U.S. and Great Britain stock markets.

Keywords

conditional heteroscedasticity, EGARCH model, ex-post forecast, GARCH model, global financial crisis, loss function, stock market, volatility.

JEL Classification: C13, C 51, C 53, C 58, G17

1. Úvod

Modelování volatility se dostalo do popředí zájmů analytiků i teoretických ekonomů zhruba před 30 lety a v současnosti zůstává jedním z nejdůležitějších výzkumných témat finanční ekonometrie. Vývoj ekonometrických modelů volatility probíhal společně s jejich aplikacemi ve sféře akademické a rovněž progresivním využitím ve finančním průmyslu.

Nedávné výzkumy považují volatilitu za v podstatě nepozorovatelnou veličinu, a tudíž pracují s podmíněnou střední hodnotou či podmíněným rozptylem za účelem analýzy a odhadu latentní volatility. Tento přístup vedl ke všem druhům modelům typu GARCH a také

¹ Ing. Petr Sed'a, Ph.D., Ekonomická fakulta VŠB-TU Ostrava, Katedra matematických metod v ekonomice, Sokolská třída 33, 701 21 Ostrava 1, Česká republika, petr.seda@vsb.cz. Tento článek vznikl za finanční podpory Studentské grantové soutěže EkF VŠB-TU Ostrava v rámci projektu SP2012/172 „Empirická analýza volatility akciových trhů v kontextu finanční krize“.

modelům stochastické volatility. Odhady těchto modelů ale nejsou často jednoduchou či triviální záležitostí, to se týká zejména modelů stochastické volatility, které nejsou schopny replikovat některé empirické vlastnosti finančních časových řad.

Investoři interpretují zvýšení volatility na akciovém trhu jako zvýšení rizika investic a v důsledku toho přesunují finanční prostředky do méně rizikových aktiv, což souvisí mimo jiné s ekonomickými aspekty globalizace, viz Sucháček (2009). Kolísání cen akcií je ale také známkou efektivnosti trhu na akciových trzích, viz Goudarzi a Ramanarayanan (2011). Negativním důsledkem kolísání cen, který ovlivňuje výkonnost finančního trhu, je tzv. destruktivní volatilita, která může vyústit v krizi na finančních trzích. Zatímco analýze volatility a jejímu vztahu k ceně aktiva byla věnována pozornost na vyspělých finančních trzích, v případě rozvíjejících trhů tomu tak není. Chování rozvíjejících se trhů se liší od projevů trhů vyspělých. Typickým projevem rozvíjejících se trhů je vyšší volatilita, viz Bekaert a Harvey (1997), což má významný dopad na rozhodování investorů.

Cílem tohoto příspěvku je empirické testování kvality ex-post predikce volatility pomocí modelů podmíněného rozptylu na vyspělých a také rozvíjejících se akciových trzích. Kvalita predikce bude následně evaluována pomocí standardně používaných kritérií v podobě ztrátových funkcí. Navíc bude provedeno srovnání predikčních schopností modelů na zkoumaných trzích v období před, během a po skončení globální finanční krize v letech 2008-09.

2. Teoretická východiska

V této kapitole budou stručně popsány vybrané způsoby aproximace volatility, které jsou běžně využívané a lze je využít pro porovnání kvality odhadů modelů. Následně budou definovány vybrané lineární a nelineární modely podmíněné heteroskedasticity, které budou využity pro modelování volatility vybraných vyspělých i rozvíjejících se akciových trhů. V neposlední řadě budou popsány kritériální funkce, které budou využity pro hodnocení kvality predikce.

2.1 Aproximace volatility

Modely historické volatility pracují se směrodatnou odchylkou σ_t jako proměnnou, jejíž hodnoty známe. Jak ji lze vypočítat, si ukážeme nyní.

První metodou, která se zdá být přirozená, je použití čtverce výnosů. Předpokládejme obecně používanou rovnici pro výnosy:

$$r_t = \mu_t + e_t, \quad (1)$$

$$e_t = \varepsilon_t + \sigma_t, \quad (2)$$

kde r_t je výnos aktiva v čase t a μ_t je vhodně modelovaná střední hodnota výnosů. Přirozené se zdá použití e_t^2 jako veličinu pro použití místo volatility σ_t^2 . Toto však není vhodné. Podle Lopez (2001) platí, že pokud pro ε_t zvolíme například normální rozdělení, tj. $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, pak druhá mocnina $\varepsilon_t^2 \sim \chi^2(1)$ pochází z chí-kvadrát rozdělení e_t^2 .

To ale znamená, že v 75 procentech případů je e_t^2 větší nebo naopak menší než σ_t^2 alespoň o polovinu. Tato aproximace se nezdá příliš vhodná a lze dle Poon (2005) využít jiné metody.

Pokud máme dostatek finančních dat naměřených s větší časovou frekvencí, než je frekvence volatility (např. pokud chceme odhadnout denní volatilitu a máme dostupná data pro výnosy aktiva měřené každých 5 minut), můžeme pro volatilitu v každém časovém okamžiku s použitím vzorce výběrové směrodatné odchylky:

$$\hat{\sigma}_t = \sqrt{\frac{1}{S-1} \sum_{s=1}^S (r_s - \mu)^2}, \quad (3)$$

kde S je počet měření. Podle Tsay (2005) má tato metoda také své nevýhody. Pokud použijeme tato data, nesmíme zapomenout, že se s finančními aktivy neobchoduje neustále, burzy se na noc zavírají. Volatilita se skládá ze dvou částí: denní a noční, přičemž noční můžeme vnímat jako vliv pozitivních či negativních zpráv na kurz v době, kdy se neobchoduje, nebo vliv obchodování v jiných částech světa. Data, která máme k dispozici, dokážou popsat a vysvětlit pouze denní volatilitu.

Nemáme-li přístup k datům s minutovou či hodinovou frekvencí nebo se jim chceme vyhnout, můžeme použít metodu nazvanou High-Low. V ní se pro odhadnutí denní volatility používají data, která jsou obvykle dostupná: nejvyšší a nejnižší hodnota, popř. otevírací a uzavírací cena. Tuto metodu poprvé použil Parkinson (1980), který předpokládá, že chování volatility následuje Brownův pohyb, a pro odhad volatility pak používá vztah:

$$\hat{\sigma}_t = \frac{(\ln H_t - \ln L_t)^2}{4 \ln 2}, \quad (4)$$

kde H_t , L_t udávají postupně nejvyšší a nejnižší denní hodnotu aktiva. Garman a Klass (1980) upravili tento estimátor do podoby:

$$\hat{\sigma}_t = 0,5 \left(\ln \frac{H_t}{L_t} \right)^2 - 0,39 \left(\ln \frac{p_t}{p_{t-1}} \right)^2, \quad (5)$$

kde p_t, p_{t-1} jsou postupně uzavírací a otevírací cena ze dne t . Estimátor v této formě je velmi citlivý na odlehlá pozorování, proto se doporučuje tato pozorování najít a ze souboru dat odstranit. Pokud se ve vzorku destabilizující hodnoty nevyskytují, pak je estimátor velmi efektivní, viz Poon (2005). Ve všech vzorcích Poon (2005) doporučuje používat směrodatnou odchylku. Jako zdůvodnění uvádí fakt, že se směrodatná odchylka udává ve stejných jednotkách jako střední hodnota, na rozdíl od rozptylu, a také je stabilnější.

2.2 Lineární modely podmíněné heteroskedasticity

V klasické literatuře představované prací Bollersleva (1986) se standardně používá model GARCH neboli model podmíněné heteroskedasticity pro modelování rozptylu výnosů dat z finančních trhů. Popularita těchto modelů spočívá v jejich kompatibilitě s některými typickými vlastnostmi finančních časových řad výnosů, existenci relativně účinných statistických metod pro odhad parametrů modelu a také možnosti relativně účinné možnosti predikce.

Standardní GARCH modely či modely stochastické volatility však nejsou schopny zachytit některé podstatné rysy typické pro vysokofrekvenční časové řady z finančních trhů. Jedná se například o: tlusté konce, dlouhou paměť volatility, vysoké hodnoty šikmosti či špičatosti, které klesají se stupněm agregace.

Standardně je AR(1)-GARCH(1, 1) model podmíněné heteroskedasticity podle Bollersleva (1986) pro diskrétní data definován následujícím způsobem:

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (6)$$

$$\varepsilon_t = \xi_t \sigma_t, \quad (7)$$

$$\xi_t \sim N(0,1), \quad (8)$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-1}^2, \quad (9)$$

kde r_t je výnos podkladového indexu. Podmíněná heteroskedasticita je modelována podle rovnice (9). $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ jsou konstanty, které vyhovují podmínkám: $\beta_0 > 0, \beta_1 + \beta_2 < 1$.

GARCH modely nejlépe fungují za relativně stabilních tržních podmínek. Ačkoli GARCH model je explicitně navržen pro modelování proměnlivé volatility, není schopen modelovat vysoce nepravidelné jevy včetně divokých tržních fluktuací jako např. krachy na burzách a následné oživení, a další neočekávané události, které vedou k významným strukturálním změnám. Nevýhodou GARCH modelů je také jeho symetrie, která je důsledkem volby kvadratického tvaru inovací v podmíněném rozptylu, protože současná volatility je pak ovlivněna pouze velikostí předchozích šoků a nebere do úvahy znaménko šoku. To je ovšem problém, protože finanční data vykazují pákový efekt. Symetrická povaha modelu brání toto chování zachytit. Proto se využívají modely nelineární.

2.3 Nelineární modely podmíněné heteroskedasticity

Jak bylo uvedeno v předchozí podkapitole, jedním z hlavních omezení lineárních modelů podmíněné volatility je fakt, že nezohledňují rozdílný vliv pozitivních a negativních zpráv. Je to dáno tím, že podmíněný rozptyl v lineárním modelu podmíněného rozptylu je funkcí čtverců reziduí, nezohledňuje tedy jejich znaménka. Z toho důvodu je nutné pro účely naší analýzy vstoupit do oblasti modelů nelineárních. Asymetrické modely podmíněného rozptylu totiž umožňují zachytit různé dopady pozitivních a negativních šoků na hodnotu volatility. K modelování tohoto jevu jsme tedy využili model, který umožňuje analyzovat asymetrický vliv šoků na volatility, tedy EGARCH model.

Zatímco model symetrický GARCH pracuje se čtverci zpožděných hodnot rozptylu a náhodných chyb v rovnici rozptylu, EGARCH(p, q) model, viz Nelson (2001), odhaduje logaritmus podmíněného rozptylu dle následujícího vztahu:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| + \sum_{i=1}^p \gamma_i \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2). \quad (10)$$

Přítomnost pákového efektu je potvrzena, pokud $\gamma_i < 0$. Špatné zprávy mají tedy větší vliv na volatility a předpokládá se, že γ_i bude v tomto případě negativní.

Kromě analytického vyjádření pákového efektu je vhodné a rovněž užitečné vyjádřit graficky. Vhodným způsobem grafického vyjádření pákového efektu je použití křivky asymetrických zpráv (NIC). Tato křivka měří vliv zpráv k datu $t-1$ na volatility v čase t , zatímco informace z předchozích období je konstantní, viz Sed'a (2011).

2.4 Kriteriaální funkce pro hodnocení kvality predikce

Jedním z rozhodujících kritérií pro výběr vhodného modelu pro modelování volatility je jejich predikční schopnost. Abychom zjistili, který model je lepší, je důležité porovnat přesnost predikce zvolených modelů. Porovnávat modely lze buďto na základě predikce ex-post, to znamená, jak dobře popisují skutečnost představovanou historickými daty, nebo predikce ex-ante, tedy jak kvalitní je jejich schopnost skutečné predikce do budoucna. Ačkoli jsou běžně používané odhady prvního typu, podle Lopez (2001) doporučuje používat pro vyhodnocení kvality modelu predikci ex-ante. Je možné předpokládat, že dobrá shoda modelu s daty je předpokladem pro dobrou predikci, tedy pokud bude některý model generující proces popisovat špatně, bude mít i špatné hodnoty predikce.

Ideální by byla metoda, která by nám ukázala relativní nebo absolutní užitečnost modelu. Ve skutečnosti lze užitečnost obtížně definovat, a proto se kvalita predikce vyhodnocuje pomocí tzv. ztrátové funkce. Pro každý model lze vypočítat hodnotu této ztrátové funkce a podle této hodnoty určí, který model je nejlepší. Je přitom důležité si uvědomit, že i ztrátové funkce samotné jsou zatíženy určitým šumem či chybou. To znamená, že pokud nabývá hodnota ztrátové funkce prvního modelu větší hodnoty než u modelu druhého, nemůžeme ještě s jistotou říci, že je druhý model lepší, ale musíme ověřit navíc významnost testu.

Uvedeme některé často používané ztrátové funkce, viz Poon (2005) nebo Lopez (2001). Často využívaným kritériem je kritérium odmocniny střední kvadratické chyby (RMSE):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{\sigma}_t - \sigma_t)^2}, \quad (11)$$

kde člen $\hat{\sigma}_t$ označuje predikovanou hodnotu a σ_t skutečnou hodnotu volatility pro T predikovaných období. Nevýhodou RMSE je symetrická podoba této ztrátové funkce, která nedostatečně penalizuje záporný rozptyl. Některé další statistiky bývají používány, ovšem jsou zatíženy stejnou chybou, jako RMSE.

Používá se také kritérium průměru absolutních hodnot chyb (MAE):

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |\hat{\sigma}_t - \sigma_t|. \quad (12)$$

Ztrátovou funkcí, která penalizuje předpovědi volatility asymetricky, je heteroskedastická HMSE, viz Bollerslev a Ghysels (1996):

$$HMSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[\frac{\sigma_t}{\hat{\sigma}_t} - 1 \right]^2. \quad (13)$$

Bollerslev, Engle a Nelson (1994) doporučují ztrátovou funkci obsaženou v Gaussovské funkci quasi-maximální věrohodnosti často používané při odhadování GARCH modelu:

$$GMLE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[\ln(\hat{\sigma}_t) + \frac{\sigma_t}{\hat{\sigma}_t} \right]. \quad (14)$$

Pro porovnání kvality predikce lze využít Theilův koeficient nerovnosti U , který má tvar:

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\sigma_t - \hat{\sigma}_t)^2}}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\sigma}_t^2} + \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sigma_t^2}}. \quad (15)$$

RSME postihuje větší chyby více než MAE, a proto RMSE nabývá vyšší hodnoty než MAE. Jinými slovy, větší rozdíl mezi nimi znamená, že větší rozptyl jednotlivých chyb ve vzorku. Hodnota Theilova koeficientu nerovnosti U se pohybuje od 0 do 1, přičemž nižší hodnota znamená lepší kvalitu. Podle Poon (2005), je vhodné se zaměřit především na RMSE a Theilův koeficient nerovnosti. Pro porovnávání přesnosti předpovědí jednotlivých modelů lze využít statistické testy, které využívají obecnou ztrátovou funkci a analyzují rozdíly mezi hodnotami ztrátových funkcí porovnávaných modelů, viz Diebold a Mariano (1995).

3. Empirická analýza

V této podkapitole budou popsána data použita pro analýzu, včetně jejich empirických vlastností, dále pak budou odhadnuty modely definované v předchozí kapitole a také bude posouzena kvalita ex-post predikce na základě vybraných ztrátových funkcí.

3.1 Data

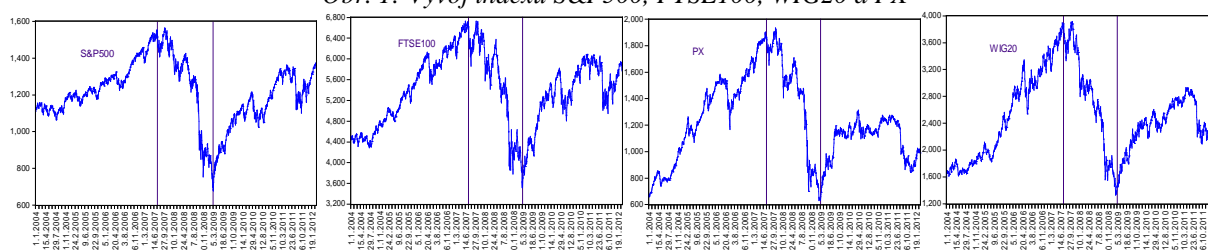
Empirická analýza bude provedena na denních datech vybraných vyspělých i rozvíjejících se akciových indexů v období od ledna 2004 do března 2012, což znamená více než 2200 denních pozorování. K dispozici máme více než 9 let dlouhé časové řady otevíracích a uzavíracích kurzů, které byly získány především z veřejně dostupných zdrojů.

Denní výnosy r_t v čase t je definován jako logaritmus rozdílu uzavíracích kurzů p
 $r_t = \log(p_t - p_{t-1})$. Vývoj uzavíracích kurzů všech analyzovaných indexů je uveden na Obr. 1.

Pro účely tohoto příspěvku byly zvoleny následující akciové trhy: rozvíjející trhy jsou zastoupeny českým a polským trhem (index PX a WIG20), vyspělé trhy pak trhem americkým (index S&P500) a britským (index FTSE100). Testovací období bylo zvoleno záměrně, a to s cílem analyzovat volatilitu v čase s důrazem na její chování v období před, během a po období globální finanční krize v letech 2008-2009.

Empiricky bylo potvrzeno, že krize se netýkají pouze vyspělých trhů (USA, Velká Británie, Německo, Japonsko, Singapur, Hong-Kong atd.), ale nevyhýbají se ani trhům rozvíjejícím (Česká republika, Polsko). V návaznosti na rozšíření negativních zpráv z amerického akciového trhu, které vyústily v globální finanční krizi, akciové trhy reagovaly poklesem také v Evropě. Zaznamenány byly poklesy akciových trhů ve výši cca 60%, viz Obr. 1. K tomu došlo především díky odchodu zahraničních portfoliových investorů v období od září do prosince 2008 a také díky psychologickému dopadu na národní investory.

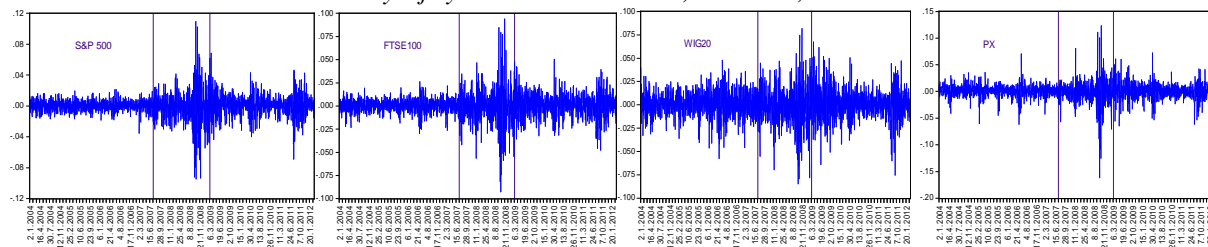
Obr. 1: Vývoj indexů S&P500, FTSE100, WIG20 a PX



Z Obr. 2 je zřejmé, že výnosy se pohybují kolem nulové střední hodnoty. Volatilita je v některých obdobích nízká a v jiných obdobích naopak vysoká. Pohyby volatility jsou jak kladné, tak záporné, a je zřejmá tendence shlukování volatility v některých obdobích či naopak období relativně nízkých hodnot volatility. Na Obr. 2 je vidět shlukování volatility, kdy vysoké výnosy jsou následovány nižšími výnosy, což vede k obdobím relativní stability. Shlukování volatility indikuje silnou autokorelaci čtverců výnosů.

Protože volatilita byla nejvyšší v roce 2008, kdy hodnoty většiny indexů dosáhly minimálních hodnot ve sledovaném období, bylo základní testovací období rozděleno na tři dílčí období. První období bylo definováno od roku 2004 do poloviny roku 2007, kdy indexy dosahovaly maximálních hodnot, druhé období zahrnuje období globální finanční krize a končí březnem 2009, kdy trhy dosáhly svých minimálních hodnot, zatímco poslední období je zakončeno březnem 2012 a zahrnuje tedy období pozvolného růstu sledovaných indexů.

Obr. 2: Vývoj výnosů indexů S&P500, FTSE100, WIG20 a PX



3.2 Empirické vlastnosti analyzovaných výnosů

Deskriptivní statistiky používáme zejména kvůli větší přehlednosti analyzovaných údajů. Při výpočtu deskriptivních statistik jsou vypočítány také čtvrté momenty sledovaných údajů, tedy špičatosti, mediánu, střední hodnoty a směrodatné odchylky. Navíc byl proveden také *J-B*

test normality. Výsledky popisných statistik všech analyzovaných indexů ve všech dílčích obdobích jsou uvedeny v Tabulce 1.

U střední hodnoty a směrodatné odchylky je možné si všimnout poměrně velkých rozdílů u jednotlivých období. Zatímco v 1. a 3. období je střední hodnota u všech akciových indexů kladná, což znamená, že v těchto obdobích byl průměrný denní výnos kladný a tedy docházelo v průměru ke zhodnocování vložených prostředků. Naopak ve 2. období je střední hodnota u všech sledovaných indexů výrazněji záporná a to znamená, že v tomto období docházelo častěji k záporným denním výnosům, než ke kladným. Při pohledu na velikost směrodatné odchylky je jasně patrné, že největší směrodatná odchylka byla zjištěna u všech indexů ve 2. období, což znamená, že toto období můžeme označit za nejrizikovější pro investory. Nižší hodnota byla zjištěna ve 3. období a nejnižší hodnota byla dosažena v 1. období, což naznačuje skutečnost, že 1. období bude ze všech sledovaných období neklidnější, bez výrazných šoků.

Tabulka 1: Popisné statistiky výnosů indexů S&P500, FTSE100, WIG20 a PX

	Předkrizové období	Období krize	Pokrizové období	Předkrizové období	Období krize	Pokrizové období
	S&P500			FTSE100		
Stř. hodnota	0,0004	-0,0019	0,0009	0,0004	-0,0015	0,0006
Median	0,0006	-0,0001	0,0009	0,0004	-0,0005	0,0003
Směr. odch.	0,0066	0,0223	0,0131	0,0067	0,0206	0,0121
Špičatost	4,2019	7,5169	6,4942	4,7175	6,9329	4,6635
<i>J-B</i> stat.	63,19	365,51	399,64	137,19	276,68	90,51
Pravděpod.	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	WIG20			PX		
Stř. hodnota	0,0009	-0,0022	0,0006	0,0011	-0,0025	0,0006
Median	0,0007	-0,0005	0,0000	0,0016	-0,0012	0,0000
Směr. odch.	0,0127	0,0218	0,0158	0,0107	0,0251	0,0152
Špičatost	4,5116	4,7066	5,4143	8,6038	12,1045	5,7086
<i>J-B</i> stat.	103,87	55,48	190,48	1254,09	1492,78	239,91
Pravděpod.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Ani v jednom z dvanácti případů není špičatost menší nebo rovna číslu 3, což jen potvrzuje, že finanční časové řady mají špičatější rozdělení pravděpodobnosti, než je tomu u normálního rozdělení, což znamená, že se hodnoty výnosů, které téměř odpovídají střední hodnotě, vyskytují častěji, než je tomu u normálního rozdělení. Ač všechny výše uvedené skutečnosti nasvědčují tomu, že se žádná časová řada indexu nechová dle normálního rozdělení, je přesto nutné toto tvrzení potvrdit pomocí *J-B* testu normality.

3.3 Výsledky odhadů modelů

Následující podkapitola je věnována odhadům lineárních a nelineárních modelů volatility časových řad indexů S&P500, FTSE100, WIG20 a PX tak, jak byly tyto modely definovány v podkapitole 2.2 a 2.3. Pro účely této studie byly odhadnuty GARCH(1, 1) a EGARCH(1, 1) modely. Stejně jako v předchozí podkapitole budou odhady rozděleny podle tří zkoumaných období, tj., předkrizového období, období globální finanční krize a pokrizového období. Výsledky všech odhadů jsou uvedeny v Tabulce 2. Odhady parametrů, jež jsou statisticky významné na 5% hladině významnosti, jsou zvýrazněny tučným písmem. $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ a γ jsou

parametry modelů podmíněného rozptylu a MV představuje hodnotu funkce maximální věrohodnosti. Z výsledků uvedených v Tabulce 2 je zřejmé, že hodnoty odhadnutých parametrů jsou ve většině případů, kromě dvou koeficientů asymetrie, a to v předkrizovém období na polském trhu a pokrizovém období na českém trhu, u všech lineárních i nelineárních modelů statisticky významné. Hodnoty koeficientů asymetrie jsou přitom nejvyšší právě v době globální finanční krize, což potvrzuje hypotézu, že negativní informace způsobují zvýšenou volatilitu.

Navíc je vidět, že hodnoty funkcí maximální věrohodnosti jsou téměř vždy vyšší v případě nelineárních modelů ve srovnání s modely lineárními, což naznačuje, že mohou být vhodnější pro predikci, přičemž nabývají nejnižších hodnot opět v době globální finanční krize a nejvyšších v období předkrizovém.

Tabulka 2: Výsledky odhadů lineárních a nelineárních modelů podmíněného rozptylu

	Předkrizové období		Období krize		Pokrizové období		Předkrizové období		Období krize		Pokrizové období	
	GARCH	EGARCH	GARCH	EGARCH	GARCH	EGARCH	GARCH	EGARCH	GARCH	EGARCH	GARCH	EGARCH
	<i>S&P500</i>						<i>FTSE100</i>					
β_0	0,0001	-0,5310	0,0001	-0,2849	0,0001	-0,4017	0,0001	-0,6779	0,0001	-0,2287	0,0001	-0,3220
β_1	0,0339	-0,0238	0,1084	0,0941	0,1034	0,1416	0,0893	0,0773	0,1347	0,0390	0,0804	0,1153
β_2	0,8977	0,9456	0,8792	0,9731	0,8760	0,9673	0,8317	0,9387	0,8453	0,9749	0,8902	0,9743
γ	-	-0,1499	-	-0,1779	-	-0,1565	-	-0,1568	-	-0,1693	-	-0,1388
MV	3331	3359	1125	1134	2404	2421	3349	3362	1123	1141	2406	2426
	<i>WIG20</i>						<i>PX</i>					
β_0	0,0001	-0,2190	0,0001	-0,2402	0,0001	-0,1939	0,0001	-1,0906	0,0001	-0,5261	0,0001	-0,3962
β_1	0,0491	0,1001	0,0976	0,0344	0,0706	0,1490	0,1136	0,2139	0,2049	0,1843	0,1262	0,2635
β_2	0,9298	0,9838	0,8821	0,9724	0,9215	0,9906	0,8362	0,8995	0,7945	0,9528	0,8634	0,9777
γ	-	0,0175	-	-0,1704	-	-0,0788	-	-0,1266	-	-0,1969	-	-0,0216
MV	2751	2750	1072	1088	2225	2233	2955	2967	1114	1127	2270	2268

Lze také konstatovat, že všechny zkoumané indexy vykazují podobné rysy chování, tzn., že nebyl zaznamenán rozdíl mezi vyspělými a rozvíjejícími se trhy.

3.4 Porovnání kvality ex-post predikce jednotlivých modelů

Odhady volatility získané na základě výsledků z předchozí podkapitoly budou porovnány se skutečnými hodnotami volatility, které byly aproximovány ze skutečných dat. Pro aproximaci volatility byla zvolena metoda High-low dle rovnice (4), přičemž byly použity otevírací a uzavírací ceny. Garman-Klassova metoda dle rovnice (5) nebyla využita vzhledem k absenci potřebných dat. Hodnoty vybraných ztrátových funkcí jsou shrnuty v Tabulce 3.

K dispozici tedy máme pro každý index a každé sledované období dva vektory predikované volatility získané pomocí GARCH(1, 1) a EGARCH(1, 1) modelů a jeden vektor aproximované volatility. Na jejich základě jsou vypočteny hodnoty následujících ztrátových funkcí: RMSE, MAE, HMSE, GMLE a Theilova koeficientu U . Z vypočítaných hodnot jsou pak porovnány predikční vlastnosti modelů pro každý index, lineární a nelineární model, zvolené období a danou ztrátovou funkci.

Tabulka 3: Kvalita ex-post predikce modelů volatility hodnocená pomocí ztrátových funkcí

	Předkrizové období		Období krize		Pokrizové období		Předkrizové období		Období krize		Pokrizové období	
	GARCH	EGARCH	GARCH	EGARCH	GARCH	EGARCH	GARCH	EGARCH	GARCH	EGARCH	GARCH	EGARCH
	S&P500						FTSE100					
RMSE	0,0066	0,0062	0,0222	0,0228	0,0131	0,0127	0,0067	0,0069	0,0212	0,0206	0,0121	0,0125
MAE	0,0049	0,0044	0,0149	0,0156	0,0090	0,0086	0,0051	0,0050	0,0143	0,0144	0,0087	0,0089
HMSE	0,1726	0,1702	0,4871	0,4598	0,2066	0,2291	0,1682	0,1698	0,6301	0,5612	0,1927	0,2081
GMLE	0,2581	0,2868	0,5769	0,5457	0,3186	0,3472	0,2465	0,2477	0,7812	0,7201	0,2791	0,2935
Theil U.	0,1392	0,1722	0,1487	0,1169	0,1275	0,1666	0,1228	0,1637	0,1704	0,1126	0,1377	0,1817
	WIG20						PX					
RMSE	0,0127	0,0129	0,0222	0,0217	0,0158	0,0159	0,0107	0,0128	0,0252	0,0251	0,0152	0,0157
MAE	0,0094	0,0091	0,0166	0,0161	0,0113	0,0116	0,0075	0,0081	0,0158	0,0154	0,0109	0,0113
HMSE	0,2729	0,2819	1,5812	1,2885	0,2922	0,2951	0,2067	0,2378	1,1838	1,0629	0,2412	0,2521
GMLE	0,3768	0,4081	0,8790	0,8943	0,3416	0,3437	0,1587	0,1721	0,8201	0,8319	0,2383	0,2408
Theil U.	0,1183	0,1073	0,1264	0,1844	0,1629	0,1896	0,1714	0,1906	0,1918	0,1392	0,1786	0,1794

Hodnoty ukazatelů RMSE a MAE vykazují podobné výsledky. Ve většině případů jsou hodnoty volatility odhadnuté pomocí lineárních modelů lepší v období stability, tedy před a po krizi, zatímco v krizovém období jsou přesnější odhady získané modely nelineárními. Hodnoty Theilova koeficientu U ukazují překvapivě relativně kvalitní predikci v období krize v případě indexu S&P500, ale také FTSE100 a PX při použití nelineárních modelů. U indexu WIG20 byly dosaženy nejlepší výsledky v období předkrizovém. Na základě hodnot ztrátových funkcí HMSE a GMLE nelze upozorovat žádnou obecnou implikaci, výsledky totiž nevykazují systematické rysy.

Souhrnně lze konstatovat, že zejména lineární modely podmíněného rozptylu mají velice dobré predikční schopnosti v obdobích stability, zatímco v době krize jsou výsledky odhadů obecně méně kvalitní, přičemž nelineární modely jsou pro predikci vhodnější než modely lineární. Kvalita predikce je obecně vyšší v případě vyspělých trhů než u trhů rozvíjejících se.

Na základě hodnot ztrátových funkcí je možné soudit, že hodnocení kvality ex-post predikce pomocí odhadnutých modelů podmíněné heteroskedasticity není úplně jednoznačné. Různá kritéria poskytují různé výsledky srovnání jednotlivých modelů, trhů a sledovaných období. Pro porovnávání přesnosti předpovědí jednotlivých modelů by bylo vhodné využít statistické testy, které využívají obecnou ztrátovou funkci a analyzují rozdíly mezi hodnotami ztrátových funkcí porovnávaných modelů.

4. Závěr

Předložený příspěvek byl věnován modelování volatility pomocí lineárních a nelineárních modelů podmíněné heteroskedasticity a evaluaci ex-post predikce získané pomocí těchto modelů při využití vybraných ztrátových funkcí. Empirická analýza byla provedena na denních výnosech vyspělých (USA, Velká Británie) i rozvíjejících se akciových trhů (Polsko, Česká republika) v období od roku 2004 do března 2012. Cílem tohoto příspěvku bylo porovnat predikční schopnosti modelů volatility v období před, během a po skončení globální finanční krize v letech 2008-2009. Při odhadech modelů bylo zjištěno, že hodnoty koeficientů

asymetrie byly statisticky významné téměř ve všech případech, přičemž nejvyšších hodnot dosahovaly právě v období globální finanční krize. Co se týče kvality predikce, nejhorších výsledků bylo dosaženo v období finanční krize, a to na základě hodnot většiny ztrátových funkcí. V obdobích stability jsou kvalitnější výsledky získané pomocí lineárních, zatímco v období finanční krize naopak modelů nelineárních. Dalšími možnými přístupy pro analýzu volatility je využití HAR-RV modelů či modelů s proměnlivými režimy.

Seznam literatury

- [1] Bekaert, G. and Harvey, C. R., 1997. Emerging Equity Market Volatility. *Journal of Financial Economics*, 43, pp. 29–77.
- [2] Bollerslev, T., 1986. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.
- [3] Bollerslev, T. and Ghysels, E., 1996. Periodic autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Business and Economic Statistics*, 14, pp. 139-157.
- [4] Bollerslev, T., Engle, R. F. and Nelson, D. B., 1994. *The Handbook of Econometrics*. Amsterdam: North-Holland, pp. 2959-3038.
- [5] Diebold, F. X. and Mariano, R. S., 1995. Comparing Predictive Accuracy. *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, pp. 253–263.
- [6] Garman, M. B. and Klass, M. J., 1980. On the estimation of security price volatilities from historical data. *Journal of Business*, 53, pp. 67–78.
- [7] Goudarzi, H. and Ramanarayanan, C.S., 2011. Modeling asymmetric volatility in the Indian stock market. *International Journal of Business and Management*, 6, pp. 221–231.
- [8] Lopez, J. A., 2001. Evaluating the Predictive Accuracy of Volatility Models. *Journal of Forecasting*, 20, pp. 87–109.
- [9] Nelson, D. B., 1991. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, 59, pp. 347–370.
- [10] Parkinson, M., 1980. The extreme value method for estimating the variance of the rate of return. *Journal of Business*, 53, pp. 61–65.
- [11] Poon, S. H., 2005. *A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility*. 1st ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
- [12] Sed'a, P., 2011. Asymmetric Conditional Volatility Modeling: Evidence from Central European Stock Markets, *Proceedings of Finanční řízení podniků a finančních institucí 2011*. VŠB – Technical University of Ostrava, Ostrava, pp. 375-383.
- [13] Sucháček, J., 2009. *Territorial development reconsidered*. 1st ed. Ostrava: VŠB-TU Ostrava.
- [14] Tsay, R. S., 2005. *Analysis of Financial Time Series*. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons Ltd.