Risk Measures in Non-life Insurance Company

Miery rizika v neživotnej poisťovni

Viera Pacáková[1]

Abstract

As insurance companies hold portfolios of insurance policies that may result in claims, it is a good management practice to assess the exposure of the company to such risks. A risk measure, which summarizes the overall risk exposures of the company, helps the company evaluate if there is sufficient capital to overcome adverse events. Risk measures for blocks of policies can also be used to assess the adequacy of the premium charged.
This paper deals with quantile-based risk measures for non-life insurance business and explains various measures that attempt to summarize the potential risks arising from the possible claims of the insurance policies.
Example of application presents computation of the above mentioned risk measures based real data from insurance company using statistical packages SAS and Statgraphics Centurion XV for loss variable which is the difference between collective risk *S* and risk premium *RP*.

Key words

Loss variable, quantile-based risk measures, value at risk (VaR), conditional VaR, mean shortfall.

JEL Classification: C13, C18, 63, G22

1. Kvantilové miery rizika

Poisťovne sú pri svojej činnosti vystavené mnohým rizikám a pre manažment poisťovne, aj pre dohľad nad jej činnosťou je potrebné tieto riziká kvantifikovať. Miery rizika umožňujú poisťovni správne stanoviť dostatočný vlastný kapitál, aj adekvátne poistné.

Budeme sa zaoberať mierami rizika v neživotnej poisťovni, ktoré sú založené na kvantiloch. Tieto miery sumarizujú potenciálne riziko, ktoré vzniká z možných poistných udalostí v portfóliu poistiek. Budeme pritom využívať rozdelenie celkových poistných plnení poisťovne za rok, resp. model kolektívneho rizika.

1.1 Hodnota v riziku (*Value-at-risk measure*)

Value at Risk (*VaR*) je pravdepodobne najrozšírenejšia miera rizika vo finančnom sektore. Definujeme ju pre náhodnú premennú *X* možných strát ako minimálnu hodnotu, pre ktorú je pravdepodobnosť straty vyššej ako táto hodnota menšia, nanajvýš rovná zvolenej pravdepodobnosti δ (Tse 2009, s. 120-121). Jednoducho vyjadrené, hodnota v riziku je najhoršia možná strata s vopred stanovenou pravdepodobnosťou.

Nech X je spojitá náhodná premenná s distribučnou funkciou $F_X(x)$ a hustotou pravdepodobnosti $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$. Pre kvantifikáciu extrémnych škôd je užitočná kvantilová funkcia, definovaná ako inverzná funkcia k distribučnej funkcii. Teda ak

[1] prof. RNDr. Viera Pacáková, PhD., Faculty of Economics and Administration, University of Pardubice, viera.pacakova@upce.cz

$$F_X(x_\delta) = \delta \tag{1}$$

potom

$$x_\delta = F_X^{-1}(\delta),$$

pričom x_δ je tzv. δ-kvantil, resp. 100δ percentil rozdelenia premennej *X*, definovaný pre ľubovoľnú pravdepodobnosť $0 < \delta < 1$.

Vyjadrené v štatistickej terminológii, miera *VaR* na úrovni δ, označená ako $VaR_\delta(X)$ je kvantil, definovaný vzťahom

$$VaR_\delta(X) = F_X^{-1}(\delta) = x_\delta. \tag{2}$$

Predpokladajme, že spojitá náhodná premenná *X* má niektoré z rozdelení: exponenciálne, lognormálne alebo Paretovo.

Ak má náhodná premenná *X* exponenciálne rozdelenie s parametrom λ, označované ako $Exp(\lambda)$, distribučná funkcia má tvar $F_X(x) = 1 - \lambda e^{-\lambda x}$, pre $x \geq 0, \lambda \geq 0$. Potom podľa (2) dostaneme vyjadrenie

$$VaR_\delta = \frac{log(1-\delta)}{\lambda} \tag{3}$$

Nech má náhodná premenná *Y* normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2, označované ako $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Definujme $X = e^Y$, teda $y = \ln x$. Potom náhodná premenná *X* má tzv. *lognormálne rozdelenie* s parametrami μ a σ^2, označované symbolicky ako $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$. Pre mieru v riziku náhodnej premennej *X* s lognormálnym rozdelením dostaneme vzťah

$$VaR_\delta = exp[\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\delta)] \tag{4}$$

kde $\Phi^{-1}(\cdot)$ je kvantilová funkcia normovaného normálneho rozdelenia.

Ak má náhodná premenná *X* Paretovo rozdelenie s parametrami $\alpha > 0$ a $\gamma > 0$, označované ako $X \sim Pa(\alpha, \gamma)$, jej distribučná funkcia má tvar:

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}\right)^\alpha \tag{5}$$

Odtiaľ dostávame

$$VaR_\delta = F_X^{-1}(\delta) = \gamma \cdot \left[(1-\delta)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right] \tag{6}$$

1.2 Podmienená hodnota v riziku (*Conditional* v*alue-at-risk measure*)

Kvantil x_δ určuje hodnotu, ktorú škody presiahnu s pravdepodobnosťou $1-\delta$, ale neposkytuje informáciu o tom, aké veľké môžu byť škody, ktoré túto hodnotu presiahnu. Preto je užitočné vyjadriť podmienenú strednú hodnotu pre škody nad touto hranicou (conditional tail expectation - *CTE*) s pravdepodobnosťou $1-\delta$, ktorá je definovaná vzťahom (Y.-K. Tse 2009, p. 123-124)

$$CTE_\delta(X) = E(X|X > x_\delta) \tag{7}$$

Podľa (2)

$$CTE_\delta(X) = E[X|X > VaR_\delta(X)] \tag{8}$$

Uvažujme stratu, definovanú ako rozdiel *X* a hodnoty *VAR*, ak škody *X* presiahli *VAR*, teda

$$X - VaR_\delta(X)|X > VaR_\delta(X) \tag{9}$$

Stredná hodnota tejto podmienenej straty sa nazýva *podmienená hodnota v riziku* (conditional *VaR*) a definuje ju vzťah

$$CVaR_\delta(X) = E[X - VaR_\delta(X) | X > VaR_\delta(X)\ ] \tag{10}$$

Tento vzťah môžeme zapísať v tvare

$$CVaR_\delta(X) = CTE_\delta(X) - VaR_\delta(X) \tag{11}$$

ktorý dostaneme takto:

$$CVaR_\delta(X) = E\left(X \middle| X > VaR_\delta(X)\right) - E\left(VaR_\delta(X) \middle| X > VaR_\delta(X)\right) = CTE_\delta(X) - VaR_\delta(X)$$

Ak použijeme VaR_δ pre stanovenie hodnoty ekonomického kapitálu, deficit bude mať hodnotu

$$(X - VaR_\delta)_+$$

Stredná hodnota takéhoto deficitu je

$$E[(X - x_\delta)_+] = E(X - x_\delta | X > x_\delta) \cdot P(X > x_\delta) = (1 - \delta) CVaR_\delta \tag{12}$$

2. Praktická ukážka výpočtu mier rizika

Uvažujme celkové škody v portfóliu neživotnej poisťovne počas kalendárneho roka, teda kolektívne riziko *S*, definované vzťahom $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

Za predpokladu, že počet poistných udalostí *N* počas roka má Poissonovo rozdelenie s parametrom $\lambda = 10\,000$ a ich výška má lognormálne rozdelenie s parametrami $\mu = 9{,}74069$ a $\sigma = 1{,}4714$, pomocou Monte Carlo simulácie sme získali 10 000 hodnôt *S*.

Na základe týchto hodnôt sme testami dobrej zhody v systéme Statgraphics Centurion XV overili hypotézu, že celkové poistné plnenia *S* majú posunuté lognormálne rozdelenie s parametrami μ = 5,0203E8, σ = 1,46387E7 , prahom 3,12414E8 (obr. 1) a kvantilom $S_{0,95}$ = 527 027 000 CZK (tab. 1).

Obr.1: Odhad parametrov a výsledok testu dobrej zhody rozdelenia S s lognormálnym rozdelením

Data variable: S
10000 values ranging from 4,51796E8 to 5,74547E8
Fitted Distributions

Lognormal (3-Parameter)
mean = 5,02032E8
standard deviation = 1,46387E7
lower threshold = 3,12414E8

Goodness-of-Fit Tests for S
Kolmogorov-Smirnov Test

	Lognormal (3-Parameter)
DPLUS	0,00577796
DMINUS	0,00449118
DN	0,00577796
P-Value	0,892247

Zdroj: Výstup procedúry Distribution fiting systému Statgraphics Centurion XV

Ak budeme uvažovať rizikové poistné *RP* rovné kvantilu $S_{1-\alpha} = S_{0,95} = 5{,}2702 \cdot 10^8$ potom stratu poisťovne v prípade, ak celkové poistné plnenie *S* presiahne *RP*, vyjadruje funkcia X, definovaná ako $X = S - RP$. Za týchto predpokladov vypočítame $VaR_\delta(X) = VaR_{0{,}995}(X)$ ak $S > RP$.

V súlade s uvedenými podmienkami a označením platí:

$$P\left((S - RP) < VaR_\delta \middle| S > RP\right) = \delta$$
$$P(S < (VaR_\delta + RP) | S > RP) = \delta$$

Z posledného vzťahu dostaneme

$$\frac{P\left(RP < S < (RP + VaR_\delta)\right)}{P(S > RP)} = \delta$$

Ak využijeme znalosť distribučnej funkcie kolektívneho rizika S, dostaneme

$$\frac{F_S(RP + VaR_\delta) - (1-\alpha)}{\alpha} = \delta$$

Odtiaľ

$$F_S(RP + VaR_\delta) = \alpha \cdot \delta + 1 - \alpha = \vartheta$$

$$P\big(S < (RP + VaR_\delta)\big) = \vartheta$$

$$RP + VaR_\delta = S_\vartheta$$

$$VaR_\delta = S_\vartheta - RP \tag{13}$$

V súlade s naším označením dostávame

$$\vartheta = \alpha \cdot \delta + (1-\alpha) = 0{,}05 \cdot 0{,}995 + 0{,}95 = 0{,}99975$$

Vo výstupe procedúry *Critical value* štatistického programového balíka STATGRAPHICS *Centurion* XV dostaneme potrebné kvantily 3-parametrického lognormálneho rozdelenia S (tab. 1).

Tab. 1: *Kvantily 3-parametrického lognormálneho rozdelenia S*

Lower Tail Area (<=)	*Lognormal (3-Parameter)*
0,95	5,27027E8
0,995	5,42995E8
0,99975	5,59654E8

Zdroj: Výstup procedúry Distribution fiting systému Statgraphics Centurion XV

Dosadením do (13) pre ϑ = 0,99975 dostaneme hodnotu v riziku:

$$VaR_\delta(X) = VaR_{0{,}995} = S_{0{,}99975} - RP = 5{,}59654 \cdot 10^8 - 5{,}27027 \cdot 10^8 = 32\,627\,000$$

Najhoršia možná strata, ktorú predstavuje rozdiel medzi celkovým poistným plnením S a rizikovým poistným RP s pravdepodobnosťou 0,995, ak je hodnota S väčšia ako RP, je 32 627 000 CZK.

Hodnoty náhodnej premennej X_a nad prahom a modelujeme Paretovým rozdelením v tzv. európskom tvare s distribučnou funkciou

$$F_a(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b, \quad x \geq a \tag{14}$$

Stredná hodnota rozdelenia je vyjadrená pomocou paramertov a, b tohoto rozdelenia pre $b > 1$ vzťahom

$$E(X_a) = \frac{a \cdot b}{b-1} \tag{15}$$

Procedúra *Distribution Fitting* štatistického programového balíka Statgraphics *Centurion* XV umožňuje na základe empirických údajov, presahujúcich prah a, odhadnúť parametre a, b Paretovho rozdelenia metódou maximálnej vierohodnosti a overiť, či výberové údaje môžu pochádzať z takéhoto rozdelenia.

Pomocou tejto procedúry sme našli 2-parametrické Paretovo rozdelenie s dobrou zhodou s hodnotami kolektívneho rizika *S*, ktoré presahujú rizikové poistné

$$RP = S_{0,95} = 5{,}27027 \cdot 10^8.$$

Maximálne vierohodné odhady parametrov a (lower threshold) a b (shape) sú vo výstupe procedúry *Distribution Fitting* systému STATGRAPHICS *Centurion* XV (obr. 2).

Obr.2: Odhad parametrov Paretovho rozdelenia

496 values ranging from 5,27027E8 to 5,74547E8
Fitted Distributions

Pareto (2-Parameter)
shape = 74,8166
lower threshold = 5,27027E8

Zdroj: Výstup procedúry Distribution fiting systému Statgraphics Centurion XV

Výsledok Kolmogorovho-Smirnovovho testu, ktorý nezamieta predpoklad dobrej zhody s Paretovým rozdelením (p-Value=0,837141>0,05), je v tabuľke 2.

Tab. 2: Výsledok Kolmogorovovho-Smirnovovho testu

	Pareto (2-Parameter)
DPLUS	0,0143693
DMINUS	0,0278264
DN	0,0278264
P-Value	0,837141

Zdroj: Výstup procedúry Distribution fiting systému Statgraphics Centurion XV

Podľa vzťahu (8) môžeme vypočítať podmienenú hodnotu v riziku $CTE_\delta(X)$ pre premennú X ako strednú hodnotu hodnôt *S*, ktoré presiahnu rizikové poistné *RP*, teda ako strednú hodnotu Paretovho rozdelenia, vyjadrenú podľa vzťahu (15) pomocou jeho odhadnutých parametrov $a = 5{,}27027$ a b = 74,8166E8. Dostaneme výsledok

$$CTE_\delta(X) = E(S|S > RP) = \frac{a \cdot b}{b-1} = 534\ 166\ 681 \text{ CZK}.$$

Podmienenú hodnotu v riziku pre premennú X pre δ = 0,995 dostaneme potom podľa vzťahu (11):

$$CVaR_\delta(X) = CTE_\delta(X) - VaR_\delta(X) = 534\ 166\ 681 - 32\ 627\ 000 = 501\ 539\ 681 \text{ CZK}$$

Miery rizika poukazujú na dôležitosť správne stanoviť rizikové poistné *RP*, lebo v prípade, že poistné plnenie prekročí jeho hodnotu, môžu byť straty poisťovne značne vysoké.

References

[1] Boland, P. J., 2007. *Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science*. London: Chapman&Hall/CRC.

[2] Horáková, G., Poljovka, J., 2010. Optimálne zaistenie stanovené hodnotou VaR resp. CVaR. In *Řízení a modelování finančních rizik*. Sborník příspěvků z 5. mezinárodní vědecké konference, 8.-9. září 2010, Ostrava. Ostrava: Vysoká škola báňská, Technická univerzita.

[3] Pacáková, V., 2011. *Modelling and Simulation in Non-Life Insurance*. Proceedings of the 5th International Conference on Applied Mathematics, Simulation, Modelling. Corfu Island: WSEAS Press.

[4] Pacáková, V. a kolektiv, 2012. *Modelování a simulace pojistných rizik*. Pardubice: Vydavatelství Univerzity Pardubice.

[5] Pinda, Ľ., Fecenko, J., Starečková, A., 2006. Poistenie a redukcia rizika. In *Řízení a modelování finančních rizik*: Sborník vybraných příspěvků, Ostrava, 6.-7. září 2006. Ostrava : Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava.

[6] Sipková, Ľ., Sodomová, E., 2007. *Modelovanie kvantilovými funkciami*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.

[7] Tse Y. K., 2009. *Nonlife Actuarial Models*. Cambridge: Cambridge University Press.