Modelling of the distribution of the claim amount after the application of a given type of insurance in the examined portfolio of contracts of a non-life insurer

Modelovanie rozdelenia poistného plnenia po aplikácii danej formy poistenia v skúmanom portfóliu poistných zmlúv neživotného poistenia

Vladimír Mucha [1]

Abstract

The aim of the paper is to present a method for modelling the distribution of the total claim amount making use of simulated values generated using VISUAL BASIC for Applications in Microsoft Excel. For a particular type of insurance we apply an expected distribution of the total claims in the examined model of insurance contracts. The research tool of simulation modelling so obtained permits the determination of the distribution function of the total insurance claim amounts, which in the case of an analytical, exact, solution would either be onerous or even impossible. This simulation approach enables an interactive analysis of the examined portfolio after the application of a given type of insurance in combination with deductibles. The generated algorithm for the distribution of the total claim amount reacts in a flexible way to changes in the parameters of the given type of insurance and offers a new prediction of the development of the portfolio for use in risk management. As illustration and a better understanding of the problem we will in the paper make use of a genuinely interesting insurance with an excess deductible.

Key words

modelling, generation, simulation, non-life insurance, total claims distribution, total claims amount, number of insurance claims, amount of insurance claim, distribution function, type of insurance, deductibles, insured value, franchise.

JEL Classification: G22 **-** Insurance; C63 **-** Computational Techniques; Simulation Modeling

1. Úvod

Projekt Solventnosť II predstavuje koncepciu budúcej regulácie solventnosti v poisťovníctve v rámci Európskej únie a jeho implementácia si vyžaduje systematické a komplexné riadenie rizík. Z tohto pohľadu je dôležitý integrovaný prístup ku všetkým druhom identifikovateľných rizík v prepojení so zvýšenými nárokmi na vnútorný kontrolný systém poisťovne. Jednou z hlavných priorít projektu je zabezpečenie dostatočných kapitálových požiadaviek v súvislosti s podstupovanými rizikami a vytváranie interných modelov poisťovní. Pri vlastných modeloch rizika dokážu poisťovne vypočítať požadovaný kapitál v takej miere, ktorá súvisí s ich rizikovým profilom. Pre tieto výpočty je v neživotnom

[1] Mgr. Vladimír Mucha, PhD. , Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, Slovensko, e-mail: mucha@euba.sk

poistení potrebné predikovať rozdelenie celkovej škody v danom modeli portfólia poistných zmlúv. Z tohto hľadiska je dôležité realizovať zber a kontrolu dát a vytváranie štatistických databáz dát o počte a výške škôd.

Jednou z možností riadenia rizika vo vytvorenom modeli poistných zmlúv a následnej predikcie v súvislosti so zabezpečením solventnosti je aplikácia určitej formy poistenia. Určiť rozdelenie celkového poistného plnenia po aplikácii poistenia je potrebné pre kalkuláciu poistného, resp. určenie ekonomického kapitálu potrebného na plnenie záväzkov.

Z riešiteľského hľadiska sú však postupy matematického aparátu analyticky náročné, resp. z exaktného hľadiska neexistujúce. Efektívnejším prístupom, ktorý poskytuje interaktívne aplikovanie rôznych foriem poistenia na predikovaný model rozdelenia celkovej škody je využitie simulácií. Zmenou parametrov poistenia, resp. jej formy môžeme flexibilne získať rozdelenie celkového poistného plnenia v rámci modelovanej situácie. Využitie simulácií si samozrejme vyžaduje počítačovú realizáciu. Tento spôsob riešenia predstavenej problematiky otvára priestor pre implementáciu nových aktuárskych a databázových softvérov. Pre názornosť a pochopenie metodológie sa budeme v tomto príspevku zaoberať simulačným procesom pri modelovaní aplikácie rýdzo záujmového poistenia v kombinácii s excedentnou spoluúčasťou. Rýdzo záujmové poistenie sa využíva v prípadoch škodového poistenia (majetkové, havarijné), keď sa poistné plnenie rovná výške škody. Excedentná spoluúčasť je doplnková forma poistenia, pričom poistenec sa podieľa na krytí definovanej časti škody[2]. Realizovať modelovanie rozdelenia poistného plnenia simuláciami je možné pre aplikácie rôznych foriem poistenia v kombinácii s možnými spoluúčasťami.

2. Aplikácia rýdzo záujmového poistenia s excedentnou spoluúčasťou

Predpokladom pre túto aplikáciu je predikovaný model portfólia poistných zmlúv neživotného poistenia, ktorý vytvoríme v určitej poistnej oblasti na základe dostupných dát, resp. odhadov. Štatistickou analýzou údajov o počte a individuálnej výške škody určíme predpokladané rozdelenia náhodných premenných počtu škôd N a individuálnej výšky škody X. Náhodná premenná, ktorá popisuje rozdelenie celkovej škody v tomto portfóliu sa bude riadiť zloženým rozdelením a označíme ju S t.j.

$$S \sim Co\left(p_N(n); F_X(x)\right),$$

pre jej charakteristiky platí [1]

$$E(S) = E(N) \cdot E(X) \tag{1}$$

$$D(S) = E(N) \cdot D(X) + E^2(X) \cdot D(N) \tag{2}$$

Ďalej predpokladáme, že najvyššia možná individuálna výška škody korešponduje s poistnou hodnotou H. Môžeme ju určiť na základe dostupných dát, resp. z rozdelenia výšky individuálnej výšky škody X napríklad ako hodnotu kvantilu $x_{0,9999}$ t.j.

$$H = x_{0,999}$$

Pre vytvorenie predikcie vývoja daného portfólia poistných zmlúv, resp. určenia rozdelenia celkového poistného plnenia ${}^{P}S$ po aplikácii rýdzo záujmového poistenia s excedentnou spoluúčasťou je potrebné stanoviť hodnotu franšízy $\boldsymbol{F}$. Ak individuálna výška škody neprekročí hodnotu franšízy, poisťovňa na poistnom plnení neparticipuje. V opačnom prípade t.j. ak je hodnota individuálnej výšky škody vyššia, poisťovňa sa podieľa na poistnom plnení výškou škody zmenšenou o hodnotu franšízy. Hodnoty premennej, ktorá popisuje individuálnu výšku poistného plnenia poisťovne vyjadruje vzťah [2], [3]

$$^{P}g_{RZP+ES}(x)=\begin{cases}0 & x\le \boldsymbol{F}\\ x-\boldsymbol{F} & x\in\left(\boldsymbol{F};H\right\rangle\end{cases} \tag{3}$$

V nasledujúcej časti odvodíme vzťahy pre výpočet charakteristík $E\left({}^{P}S\right)$, $D\left({}^{P}S\right)$, ktorých hodnoty neskôr porovnáme s hodnotami dosiahnutými simuláciami. Ak označíme $P\left(X>\boldsymbol{F}\right)=p_{\boldsymbol{F}}$, potom pre náhodnú premennú popisujúcu počet poistných plnení prislúchajúcich poisťovni a jej charakteristiky platí

$$^{P}N_{RZP+ES} \sim Co\left(N;A\left(p_{\boldsymbol{F}}\right)\right)$$

$$E\left({}^{P}N_{RZP+ES}\right)=p_{\boldsymbol{F}}\cdot E\left(N\right), \tag{4}$$

$$D\left({}^{P}N_{RZP+ES}\right)=p_{\boldsymbol{F}}\cdot\left(1-p_{\boldsymbol{F}}\right)\cdot E\left(N\right)+p_{\boldsymbol{F}}^{2}\cdot D\left(N\right) \tag{5}$$

Pre náhodnú premennú individuálnej výšky poistného plnenia ${}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}$, za predpokladu, že individuálna výška škody prekročila hodnotu franšízy $\boldsymbol{F}$ platí

$$^{P}\overline{X}_{RZP+ES}={}^{P}X_{RZP+ES}\,/\,X>\boldsymbol{F}$$

resp.

$$^{P}\overline{X}_{RZP+ES}={}^{P}X_{RZP+ES}\,/\,{}^{P}X_{RZP+ES}>0$$

V prípade spojitej náhodnej premennej ${}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}$ potom pre hustotu pravdepodobnosti platí

$$^{P}\overline{f}_{RZP+ES}\left(x\right)=\frac{f_{RZP+ES}\left(x\right)}{p_{\boldsymbol{F}}},\quad x\in\left(\boldsymbol{F};H\right\rangle$$

Na základe čoho pre charakteristiky náhodnej premennej ${}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}$ dostaneme nasledujúce vzťahy

$$E\left({}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}\right)=\int_{\boldsymbol{F}}^{H}{}^{P}g_{RZP+ES}\left(x\right)\cdot{}^{P}\overline{f}_{RZP+ES}\left(x\right)dx=\int_{\boldsymbol{F}}^{H}\left(x-F\right)\cdot{}^{P}\overline{f}_{RZP+ES}\left(x\right)dx \tag{6}$$

$$E\left({}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}^{2}\right)=\int_{\boldsymbol{F}}^{H}{}^{P}g_{RZP+ES}^{2}\left(x\right)\cdot{}^{P}\overline{f}_{RZP+ES}\left(x\right)dx=\int_{\boldsymbol{F}}^{H}\left(x-\boldsymbol{F}\right)^{2}\cdot{}^{P}\overline{f}_{RZP+ES}\left(x\right)dx \tag{7}$$

$$D\left({}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}\right)=E\left({}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}^{2}\right)-E^{2}\left({}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}\right) \tag{8}$$

Využitím náhodných premenných ${}^{P}N_{RZP+ES}$ a ${}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}$ môžeme na základe predpokladov spĺňajúcich podmienky kolektívneho modelu rizika určiť charakteristiky celkového poistného plnenia ${}^{P}S$ [2],

$$E\left({}^{P}S\right)=E\left({}^{P}N_{RZP+ES}\right)\cdot E\left({}^{P}\overline{X}_{ZP+ES}\right) \tag{9}$$

$$D\left({}^{P}S\right)=E\left({}^{P}N_{RZP+ES}\right)\cdot D\left({}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}\right)+E^{2}\left({}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}\right)\cdot D\left({}^{P}N_{RZP+ES}\right) \tag{10}$$

Určiť rozdelenie celkového poistného plnenia ${}^{P}S$ prostredníctvom distribučnej funkcie $F_{{}^{P}S}\left(x\right)$ je z analytického, resp. exaktného hľadiska náročné. Preto si v ďalšej časti predstavíme možnosť jeho určenia využitím simulácií. Takto určené hodnoty distribučnej funkcie $F_{^PS}(x)$ v praktickej časti potom porovnáme s hodnotami získanými na základe aproximácie.

3. Určenie rozdelenia celkového poistného plnenia využitím simulácií

V tejto časti príspevku sa budeme venovať dvom alternatívam generovania hodnôt celkového poistného plnenia ^PS. Ich štatistickým spracovaním je možné určiť jeho charakteristiky $E\left({}^PS\right)$, $D\left({}^PS\right)$ a rozdelenie prostredníctvom distribučnej funkcie $F_{^PS}(x)$. V prvej alternatíve využijeme generovanie hodnôt celkového poistného plnenia ^PS využitím náhodných premenných $^PN_{RZP+ES}$ a $^P\overline{X}_{RZP+ES}$. Druhá alternatíva generovania ponúka efektívnejšie riešenie uvedenej problematiky. Využíva princíp, resp. vzťahy súvisiace s prvou alternatívou a umožňuje tak generovať hodnoty náhodných premenných $^PN_{RZP+ES}$ a $^P\overline{X}_{RZP+ES}$ bez špecifikovania ich rozdelenia. V prípade aplikácie iných foriem poistenia by realizácia prvej alternatívy mohla byť náročná, čo vytvára potenciál pre využívanie druhej, jednoduchšej alternatívy generovania hodnôt celkového poistného plnenia ^PS .

3.1 Generovania hodnôt výšky poistného plnenia ^PS pomocou náhodných premenných $^PN_{RZP+ES}$ a $^P\overline{X}_{RZP+ES}$ (prvá alternatíva)

Hodnoty náhodnej premennej ^PS, ktorá reprezentuje výšku poistného plnenia po aplikácii konkrétnej formy poistenia je možné generovať pomocou nasledujúceho algoritmu

1. vygenerujeme hodnotu náhodnej premennej $^PN_{RZP+ES} \sim Co\left(N; A\left(p_{\boldsymbol{F}}\right)\right)$, ktorú označíme $^Pn_1$

2. v nasledujúcom kroku vygenerujeme $^Pn_1$ hodnôt náhodnej premennej $^P\overline{X}_{RZP+ES}$ na základe vzťahu

$$F_Y(y) = P\left(X - \boldsymbol{F} \le y / X > \boldsymbol{F}\right) = P\left(X \le y + \boldsymbol{F} / X > \boldsymbol{F}\right), \qquad (11)$$

kde pre náhodnú premennú Y platí

$$Y = {}^P\overline{X}_{RZP+ES} = \left(X - \boldsymbol{F}\right) / X > \boldsymbol{F}$$

Jeho úpravou dostaneme

$$F_Y(y) = P\left(X \le y + \boldsymbol{F} / X > \boldsymbol{F}\right) = \frac{P\left(X \le y + \boldsymbol{F} \wedge X > \boldsymbol{F}\right)}{P\left(X > \boldsymbol{F}\right)} = \frac{F_X\left(\boldsymbol{F} + y\right) - F_X\left(\boldsymbol{F}\right)}{p_{\boldsymbol{F}}}, \quad \text{resp.}$$

$$F_{^P\overline{X}_{RZP+ES}}(y) = F_Y(y) = \frac{F_X(x) - 1}{p_{\boldsymbol{F}}} + 1 \qquad (12)$$

Hodnoty náhodnej premennej Y, resp. $^P\overline{X}_{RZP+ES}$ vygenerujeme na základe inverznej transformačnej metódy podľa vzťahu

$$F_X^{-1}(a) = x_a, \quad a \in (0,1) \qquad (13)$$

Ak označíme $F_Y(y) = p$, kde $p \in (0;1)$ potom

$$y_p = {}^P\overline{x}_{RZP+ES} = x_a - \boldsymbol{F}, \quad \text{kde} \qquad (14)$$

$$a = p_{\boldsymbol{F}} \cdot (p - 1) + 1$$

3. V druhom kroku sme vygenerovali $^Pn_1$ hodnôt náhodnej premennej $^P\overline{X}_{RZP+ES}$, ktorých súčtom získame prvú hodnotu výšky poistného plnenia ^PS t.j.

$$^{P}s_1 = {}^{P}\overline{x}_{RZP+ES_{11}} + {}^{P}\overline{x}_{RZP+ES_{12}} + {}^{P}\overline{x}_{RZP+ES_{13}} + \ldots + {}^{P}\overline{x}_{RZP+ES_{1^{P}n_1}}$$

Ak zopakujeme tento algoritmus m krát, získame m hodnôt náhodnej premennej ^{P}S t.j.

$$^{P}s_1, {}^{P}s_2, {}^{P}s_3, \ldots, {}^{P}s_m$$

Ich štatistickým spracovaním získame dôležité charakteristiky $E\left({}^{P}S\right)$, $D\left({}^{P}S\right)$ na základe vzťahov

$$^{sim}E\left({}^{P}S\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} {}^{P}s_i \tag{14}$$

$$^{sim}D\left({}^{P}S\right) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left({}^{P}s_i - {}^{sim}E\left({}^{P}S\right)\right)^2 \tag{15}$$

a distribučnú funkciu $F_{^{P}S}(x)$ na základe vzťahu

$$F_{^{P}S}(x) \approx \frac{k}{m}, \tag{16}$$

kde k je počet hodnôt náhodnej premennej ^{P}S, ktoré spĺňajú podmienku $^{P}s \le x$.

Vzhľadom na skúsenosti s generovaním hodnôt celkovej škody S prostredníctvom hodnôt náhodných premenných počtu škôd N a individuálnej výšky škody X sú na mieste nasledujúce otázky.

Ak upravíme vygenerované hodnoty individuálnej výšky škody podľa vzťahu (3), budú takto transformované nenulové hodnoty vygenerovanými hodnotami náhodnej premennej $^{P}\overline{X}_{RZP+ES}$? Bude ich počet predstavovať vygenerovanú hodnotu náhodnej premennej $^{P}N_{RZP+ES}$, popisujúcej počet poistných plnení? Získame ich súčtom hodnotu náhodnej premennej ^{P}S, ktorá popisuje celkovú výšky poistného plnenia? V prípade kladnej odpovede na tieto otázky by sme tak získali efektívny algoritmus generovania hodnôt náhodných premenných $^{P}N_{RZP+ES}$ a $^{P}\overline{X}_{RZP+ES}$, resp. hodnôt celkovej výšky poistného plnenia ^{P}S.

Realizácia dostatočného počtu simulácií pre porovnanie štatistického spracovania simulovaných hodnôt získaných transformáciou individuálnej výšky škody podľa vzťahu (3) s hodnotami, ktoré sme získali analytickými postupmi nám umožňuje odpovedať kladne na prvú položenú otázku [1]. Hodnoty charakteristík $E\left({}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}\right)$ a $D\left({}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}\right)$ vypočítané podľa vzťahov (6), (8) boli porovnateľné s hodnotami získanými simuláciou a štatistickým spracovaním. Porovnateľné boli aj hodnoty distribučnej funkcie $F_{^{P}\overline{X}_{RZP+ES}}(y)$ vypočítané podľa vzťahu (12) s hodnotami distribučnej funkcie určenej štatistickým spracovaním nasimulovaných transformovaných hodnôt.

Dostatočným počtom simulácií sme si overili porovnateľnosť týchto charakteristík aj v prípade vygenerovaného počtu nenulových transformovaných hodnôt individuálnej výšky škody. Môžeme tvrdiť, že predstavuje hodnoty náhodnej premennej $^{P}N_{RZP+ES}$, ktorá popisuje počet poistných plnení prislúchajúcich poisťovni. To znamená, že druhá alternatíva generovania hodnôt výšky poistného plnenia ^{P}S ho realizuje tiež prostredníctvom hodnôt náhodných premenných $^{P}N_{RZP+ES}$ a $^{P}\overline{X}_{RZP+ES}$ a popíšeme ju v nasledujúcej časti príspevku.

3.2 Generovania hodnôt výšky poistného plnenia ^{P}S pomocou transformácie náhodných premenných N a X (druhá alternatíva)

1. vygenerujeme hodnotu náhodnej premennej N, ktorá popisuje počet škôd v danom portfóliu a označíme ju n_1

2. v druhom kroku vygenerujeme n_1 hodnôt náhodnej premennej X , ktorá popisuje individuálnu výšky škody, ich súčtom získame prvú hodnotu celkovej škody S t.j.

$$s_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + ... + x_{1n_1}$$

Ak chceme získať prvú hodnotu výšky poistného plnenia ${}^{P}S$ tj. ${}^{P}s_1$ aplikujeme danú formu poistenia. Pripomíname, že v príspevku pre názornosť aplikujeme rýdzo-záujmové poistenie s excedentnou spoluúčasťou.

3. Hodnoty individuálnej výšky škody X vygenerované v druhom kroku transformujeme na základe vzťahov

$$x \le \boldsymbol{F} \quad \Rightarrow \quad {}^{P}g_{RZP+ES}\left(x\right) = 0$$

$$x \in \left(\boldsymbol{F}; H\right\rangle \quad \Rightarrow \quad {}^{P}g_{RZP+ES}\left(x\right) = x - \boldsymbol{F}$$

odkiaľ dostaneme napríklad nasledovnú transformáciu

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, ..., x_{1n_1} \quad \rightarrow \quad 0, \left(x_{12} - \boldsymbol{F}\right), \left(x_{13} - \boldsymbol{F}\right), 0, ..., \left(x_{1n_1} - \boldsymbol{F}\right)$$

Hodnoty, ktoré sú rôzne od nuly t.j.

$$x_{12} - \boldsymbol{F}, x_{13} - \boldsymbol{F}, ..., x_{1n_1} - \boldsymbol{F} \ ,$$

sú hodnotami náhodnej premennej ${}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}$ a ich počet, ktorý označíme ${}^{P}n_1$ reprezentuje vygenerovanú hodnotu náhodnej premennej ${}^{P}N_{RZP+ES}$.

4. Súčtom hodnôt $x_{12} - \boldsymbol{F}, x_{13} - \boldsymbol{F}, ..., x_{1n_1} - \boldsymbol{F}$ získame prvú hodnotu výšky poistného plnenia ${}^{P}S$ t.j.

$${}^{P}s_1 = \left(x_{12} - \boldsymbol{F}\right) + \left(x_{13} - \boldsymbol{F}\right) + ... + \left(x_{1n_1} - \boldsymbol{F}\right)$$

Ak zopakujeme tento algoritmus m krát, získame m hodnôt náhodnej premennej ${}^{P}S$ t.j.

$${}^{P}s_1, {}^{P}s_2, {}^{P}s_3, ..., {}^{P}s_m$$

Ich štatistickým spracovaním na základe vzťahov (14), (15), (16) získame dôležité charakteristiky $E\left({}^{P}S\right)$, $D\left({}^{P}S\right)$ a $F_{{}^{P}S}\left(x\right)$.

Výhodou tejto alternatívy generovania hodnôt výšky poistného plnenia ${}^{P}S$ je jednoduchá transformácia spomínaných hodnôt individuálnej výšky škody podľa aplikovanej formy poistenia. Nie je tak potrebné vytvárať špeciálny algoritmus generovania hodnôt ${}^{P}s_1, {}^{P}s_2, {}^{P}s_3, ..., {}^{P}s_m$ na základe rozdelení náhodných premenných ${}^{P}N$ a ${}^{P}\overline{X}_{ES}$. Obidve alternatívy sú založené na rovnakom princípe generovania prostredníctvom hodnôt náhodných premenných ${}^{P}N_{RZP+ES}$ a ${}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}$ aj keď iným spôsobom. Táto forma určenia rozdelenia celkového poistného plnenia poskytuje interaktívny riešiteľský nástroj pri vytváraní rôznych analyzovaných predikcií v rámci jednej, resp. rôznych foriem poistenia aplikovaných na dané portfólio poistných zmlúv. Musíme poznamenať, že možnosť využitia tejto metódy modelovania celkového poistného plnenia sme overili aj pri iných formách poistenia a spoluúčasti.

4. Realizácia modelovania rozdelenia celkového poistného plnenia na konkrétnej databáze údajov

Na základe štatistického spracovania údajov o počte škôd a individuálnej výške škody v danej sledovanej tarifnej skupine poistného produktu predpokladáme ich nasledovné rozdelenie

$$N \sim Bi(500;0,2), \quad X \sim \Gamma(3;2)$$

so základnými charakteristikami

$$E(N) = m \cdot q = 500 \cdot 0,2 = 100, \quad E(X) = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{0,5} = 6$$

To znamená. že celková škoda S sa riadi zloženým binomickým rozdelením

$$S \sim CoBi\left(m = 500;\, q = 0,2;\, F_X(x)\right),$$

so základnými charakteristikami

$$E(S) = E(N) \cdot E(X) = 100 \cdot 6 = 600$$

$$D(S) = E(N) \cdot D(X) + E^2(X) \cdot D(N) =$$

$$= 100 \cdot 12 + 6^2 \cdot 80 = 4080$$

Pre predikciu vývoja tohto portfólia po aplikácii rýdzo záujmového poistenia s excedentnou spoluúčasťou z hľadiska určenia rozdelenia celkového poistného plnenia ${}^{P}S$ použijeme uvedenú možnosť generovania jej hodnôt. Simulácia rozdelenia celkového poistného plnenia bola realizovaná v prostredí programovacieho jazyka VISUAL BASIC for Applications v Microsoft Excel. Pri aplikácii tejto formy poistenia prezentovaným spôsobom modelovania je možná analýza situácií, ktoré vzniknú po určení hodnoty franšízy ***F*** v súvislosti s problematikou riadenia rizika. V tomto portfóliu poistných zmlúv sme pre výpočty stanovili franšízu na hodnotu

F = 6

Na základe dostupných dát sme z rozdelenia výšky individuálnej škody X určili poistnú hodnotu H ako hodnotu $x_{0,999995}$ t.j.

$$H = x_{0,999995} \approx 35$$

Hodnoty $E({}^{P}S), D({}^{P}S)$ a distribučnej funkcie $F_{{}^{P}S}(x)$ dosiahnuté generovaním prvou alternatívou sú porovnateľné s výsledkami druhej alternatívy a nebudeme ich preto uvádzať. Budeme sa venovať efektívnejšej druhej alternatíve generovania hodnôt celkového poistného plnenia ${}^{P}S$. Porovnateľnosť výsledkov týchto alternatív generovania samozrejme deklaruje ich rovnaký princíp a správnosť našich úvah.

Charakteristiky celkového poistného plnenia $E({}^{P}S)$ a $D({}^{P}S)$ určíme analyticky a ich hodnoty porovnáme s hodnotami určenými simuláciou. Charakteristiky pre náhodnú premennú ${}^{P}N_{RZP+ES}$ určíme podľa vzťahu (4), resp. (5),

$$E({}^{P}N_{RZP+ES}) = 0,423189 \cdot 100 = 42,3189$$

$$D({}^{P}N_{RZP+ES}) = 0,423189 \cdot (1 - 0,423189) \cdot 100 + 0,423189^2 \cdot 80 = 38,73712140$$

Charakteristiky pre náhodnú premennú ${}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}$ určíme podľa vzťahu (6), resp. (7), (8),

$$E\left({}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}\right)=\int_{6}^{35}(x-6)\cdot\frac{\frac{0,5^3\cdot x^2\cdot e^{-0,5x}}{2}}{0,423189}\,dx=3,176160704$$

$$E\left({}^{P}\overline{X}^2_{RZP+ES}\right)=\int_{6}^{35}(x-6)^2\cdot\frac{\frac{0,5^3\cdot x^2\cdot e^{-0,5x}}{2}}{0,423189}\,dx=18,34300787$$

$$D\left({}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}\right)=E\left({}^{P}\overline{X}^2_{RZP+ES}\right)-E^2\left({}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}\right)=8,255011052$$

Potom pre charakteristiky náhodnej premennej ${}^{P}S$ podľa vzťahov (9), (10), dostaneme

$$E\left({}^{P}S\right)=42,3189\cdot 3,176160704=134,3957146$$

$$D\left({}^{P}S\right)=42,3189\cdot 8,255011052+3,176160704^2\cdot 38,7371214=740,1229446$$

Tieto vypočítané hodnoty porovnáme s hodnotami charakteristík $E\left({}^{P}S_{Sim}\right)$, $D\left({}^{P}S_{Sim}\right)$ náhodnej premennej ${}^{P}S$, ktoré sme získali generovaním $80\,000$ jej hodnôt a ich následného štatistického spracovania podľa vzťahov (14),(15),

$$E\left({}^{P}S_{Sim}\right)\approx 134,4355$$

$$D\left({}^{P}S_{Sim}\right)\approx 738,7425$$

Ďalším spracovaním vygenerovaných hodnôt výšky celkového poistného plnenia ${}^{P}S$ sme určili jeho rozdelenie prostredníctvom distribučnej funkcie $F_{{}^{P}S}(x)$ využitím vzťahu (16). Takto určené hodnoty $F_{{}^{P}S}(x)$ porovnáme s hodnotami distribučnej funkcie určenými na základe aproximácie posunutým gamma rozdelením v tabuľke 1.

$$F_{{}^{P}S}(x)\approx F_Z(x-x_0)$$

Pre koeficient zošikmenia celkového poistného plnenia, ktorý sme vypočítali na základe rozdelení náhodných premenných ${}^{P}N_{RZP+ES}$ a ${}^{P}\overline{X}_{RZP+ES}$ platí

$$\rho\left({}^{P}S\right)=0,28372.$$

Pre porovnanie uvádzame hodnotu tohto koeficientu určeného štatistickým spracovaním vygenerovaných hodnôt náhodnej premennej ${}^{P}S$,

$$\rho\left({}^{P}S_{sim}\right)\approx 0,282279794.$$

Pre jednotlivé parametre aproximácie posunutým gamma rozdelením potom platí

$$Z \sim \Gamma(49,688817;0,2591061),\; x_0=-57,37514$$

Tabuľka 1: Hodnoty distribučnej funkcie $F_{{}^{P}S}(x);\ \approx F_Z(x-x_0)$

x	$F_{{}^{P}S}(x)$	$\approx F_Z(x-x_0)$
170	0,89986	0,900106
180	0,94496	0,945834
190	0,97271	0,972603

Hodnoty distribučnej funkcie $F_{{}^{P}S}(x)$ získané simuláciou sú porovnateľné s hodnotami určenými aproximáciou posunutým gamma rozdelením. Poznať hodnoty distribučnej funkcie

$F_{P_S}(x)$ celkového poistného plnenia je dôležité pre výpočty súvisiace so zabezpečením ekonomického kapitálu pre potreby plnenia si záväzkov poisťovne, resp. v procese riadenia rizika pomocou metód *VaR* a *CVaR*.

References

[1] Horáková, G. and Mucha, V., 2006. *Teória rizika v poistení. I. časť*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.

[2] Horáková, G. and Mucha, V.,2008. *Teória rizika v poistení. II. časť*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.

[3] Fecenko, J., 2008. *Neživotné poistenie.* Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.

[4] Mucha, V., 2008. *Simulácie ako nástroj riadenia rizika v neživotnom poistení.* Ostrava: Řízení a modelování finančních rizik: sborník příspěvků ze 4. mezinárodní vědecké konference.

[5] Daykin, C. D., Pentikäinen, T. and Pesonen, E, 1994. *Practical risk theory for Actuaries.* London: Chapman &Hall.

[6] Rubinstein, R., 1981. *Simulation and the Monte Carlo method*. Toronto: John Wiley & Sons, Inc..

[7] Walkenbach, J., 2008. *Excel® 2007 Power Programming with VBA*. Indiana: Wiley Publishing, Inc..