Backtesting of VaR estimation for investment into foreign stock index

Zpětné testování odhadu VaR investice do zahraničního akciového indexu

Aleš Kresta [1]

Abstract

When modeling foreign stock index returns we are concerned not only with returns of the stock index but also with the returns of the foreign exchange rate of the corresponding currency and their mutual dependency. The appropriate model in this case is based on the copula function approach, i.e. the joint probability distribution is decomposed into two parts – individual marginal distributions and dependency among them. In the article we compare the most known copula functions which are usually utilized for financial time series modeling. The comparison is carried out utilizing backtesting procedure on the historical data of four well known stock indices and corresponding foreign exchange rates. On the basis of this comparison we conclude that Clayton copula function is the best for financial time series modeling. Also Student copula function provides accurate estimations.

Key words

Backtesting, copula functions, model validation, normal inverse Gaussian model, Value at Risk.

JEL Classification: G15, G21, G22

1 Úvod

Určuje-li se riziko v případě investice do zahraničního aktiva, je nutné při modelování výnosů zohlednit jak pravděpodobnostní rozdělení výnosů tohoto aktiva v zahraniční měně, tak i rozdělení výnosů zahraniční měny a jejich vzájemnou závislost. Tímto vzniká potřeba modelovat vývoj dvou rizikových faktorů, které jsou mezi sebou do určité míry závislé. V případě modelování bez zohlednění této závislosti mezi jednotlivými rizikovými faktory může dojít k nadhodnocení (v případě záporné závislosti) nebo podhodnocení rizika (v případě kladné závislosti). Z tohoto důvodu je potřeba s touto závislostí v modelu uvažovat. Elegantním řešením je použití kopula funkcí, neboť tyto umožňují uvažovaný model rozdělit na dvě části: (i) část zachycující závislost pomocí kopula funkce a (ii) pravděpodobnostní rozdělení jednotlivých rizikových faktorů – marginální rozdělení. Použitím kopula funkcí včetně aplikací ve financích se zabývá Rank (2006), přehled teorie lze nalézt např. v Cherubini a kol. (2004).

---

[1] Ing. Aleš Kresta, Ph.D. VŠB – Technická univerzita Ostrava, ekonomická fakulta, katedra financí, Sokolská tř. 33, Ostrava. ales.kresta@vsb.cz.
Tento příspěvek byl vypracován v rámci projektu Příležitost pro mladé výzkumníky, reg. č. CZ.1.07/2.3.00/30.0016, podpořeného Operačním programem Vzdělávání pro konkurenceschopnost a spolufinancovaného Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky. Příspěvek vznikl rovněž díky podpoře v rámci projektu SGS VŠB-TUO SP2012/2.

Pro modelování marginálních rozdělení je v článku uvažován normální inversní Gaussův model a normální rozdělení. Empiricky bylo sice prokázáno, že normální rozdělení není pro modelování výnosů finančních aktiv vhodné a to z důvodu, že neumožňuje zachytit vyšší špičatost (tzv. těžké konce) a šikmost (asymetrii rozdělení). V článku je však normální rozdělení použito jako benchmark. Jako další modely marginálních rozdělení lze použít např. Studentovo rozdělení nebo smíšené normální rozdělení. Zpětným testováním normálního/Studentova/empirického rozdělení pravděpodobnosti spolu s modely podmíněné volatility typu GARCH se zabýval například Alexander a Sheedy (2008). Rovněž Lévyho modely jsou vhodným rozdělením pro modelování finančních časových řad, aplikaci těchto modelů lze nalézt například v Tichý (2010).

Cílem příspěvku je zpětně otestovat použitelnost různých kopula funkcí pro odhad rizika výnosu zahraničního akciového indexu pro euro investora a porovnat získané výsledky.

Příspěvek je členěn následovně. V druhé kapitole budou popsány kopula funkce, včetně definice jejich jednotlivých typů. Následně bude ve třetí kapitole popsáno normální inverzní Gaussovo rozdělení použité v aplikační části pro modelování marginálních rozdělení. Ve čtvrté kapitole bude představena míra rizika Value at Risk a budou definovány některé statistické testy použité pro ověření přesnosti jejího odhadu. Pátá kapitola je aplikační a shrnuje výsledky získané použitím normálního rozdělení a normálního inversního Gaussova modelu spolu s různými kopula funkcemi pro odhad hodnoty Value at Risk.

2 Popis kopula funkcí

Kopula funkce byly poprvé představeny Sklarem (Sklar, 1959). Přehled teorie spolu s praktickou aplikací pak lze nalézt v (Cherubini a kol., 2004; Nelsen, 2006; Rank, 2006). Pro jednoduchost budeme dále uvažovat dvourozměrnou kopula funkci, přičemž vše platí analogicky i pro n-rozměrné kopula funkce.

Kopula funkce jsou v podstatě reálné funkce, které zachycují závislost jednotlivých distribučních funkcí v $[0,1]$,

$$C:[0,1]^2 \to [0,1] \text{ v } R^2, \tag{1}$$

přičemž musí pro jakékoliv $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ splňovat:

$$C(u,0) = C(0,v) = 0, \tag{2}$$

$$C(u,1) = u,\ C(1,v) = v, \tag{3}$$

$$\text{pokud } u_1 \le u_2,\ v_1 \le v_2 \text{ pak } C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \ge 0\,. \tag{4}$$

Na kteroukoliv kopula funkci může být pohlíženo jako na vícerozměrnou distribuční funkci s marginálními distribučními funkcemi ve formě standardizovaného rovnoměrného rozdělení.

Předpokládejme dvě potencionálně závislé náhodné proměnné X a Y s marginálními distribučními funkcemi F_X a F_Y a sdruženou distribuční funkcí $F_{X,Y}$. Potom dle Sklarova teorému platí:

$$F_{X,Y}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)). \tag{5}$$

Pokud jsou marginální distribuční funkce F_X a F_Y spojité, kopula funkce C je jedinečná. Sklarův teorém naznačuje také inversní vztah,

$$C(u,v) = F_{X,Y}\left(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)\right). \tag{6}$$

Z formulace (5) je patrné, že sdružené rozdělení pravděpodobnosti obsahuje dvě rozdílné informace: (i) marginální distribuční funkce jednotlivých náhodných proměnných, (ii) funkci závislosti těchto distribučních funkcí. Zatímco marginální distribuční funkce jsou dány pomocí F_X a F_Y, kopula funkce C popisuje pouze závislost těchto distribučních funkcí. Za předpokladu znalosti marginálních distribučních funkcí náhodných proměnných je tedy pro potřeby modelování nezbytné zvolit vhodnou kopula funkci. S trochou zjednodušení lze rozlišit eliptické a Archimédovy kopula funkce.

Eliptické kopula funkce vycházejí z některého eliptického sdruženého rozdělení pravděpodobnosti, konkrétně nejpoužívanější jsou Gaussova a Studentova kopula funkce. Nevýhodou při aplikaci těchto kopula funkcí v oblasti financí je jejich symetričnost, což neodpovídá hlavně koncům sdružených rozdělení empirických dat.[2] Obecně můžeme do kopula funkce dosadit dle (5) jakékoliv marginální rozdělení, ovšem použitím normálního rozdělení v případě Gaussovy kopula funkce získáváme sdružené normální rozdělení pravděpodobnosti a použitím Studentova rozdělení ve Studentově kopula funkci získáváme sdružené Studentovo rozdělení pravděpodobnosti.

Gaussovu kopula funkci lze za předpokladu korelace mezi náhodnými proměnnými R definovat následovně,

$$C_R^{Ga}(u,v)=\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}e^{\left[\frac{2Rst-s^2-t^2}{2-2R^2}\right]}ds\,dt\,, \tag{7}$$

Studentova kopula funkce vychází ze Studentova rozdělení a lze ji definovat následovně,

$$C_{R,\upsilon}^{St}(u,v)=\int_{-\infty}^{t_\upsilon^{-1}(u)}\int_{-\infty}^{t_\upsilon^{-1}(v)}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}\left[1+\frac{s^2+t^2-2Rst}{\nu\left(1-R^2\right)}\right]^{-\frac{\nu+2}{2}}ds\,dt\,, \tag{8}$$

kde R opět značí korelaci mezi náhodnými proměnnými a ν značí stupně volnosti – parametr, kterým lze u Studentovy kopula funkce ovlivňovat její chování v koncích rozdělení. Pro nižší hodnoty tohoto parametru je pravděpodobnost extrémního scénáře vyšší, naopak čím je parametr ν vyšší, tím více se Studentova kopule blíží Gaussově kopuli.

Archimédovy kopula funkce jsou uměle vytvořené funkce na základě generátoru. Generátor je vhodně zvolená spojitá, klesající a konvexní funkce ϕ,

$$\phi:[0,1]\to R^{*+}\,, \tag{9}$$

pro kterou platí $\phi(1)=0$, pro striktní generátor navíc platí $\phi(0)=\infty$. Ke generátoru je možno taktéž definovat pseudo-inverzní funkci $\phi^{[-1]}$. Obecně lze pak Archimédovy kopula funkce definovat následovně,

$$C_{\phi,\phi^{[-1]}}^{Arch}(u,v)=\phi^{[-1]}(\phi(u),\phi(v))\,. \tag{10}$$

Nejznámější Archimédovy kopula funkce jsou: Gumbelova kopula funkce (Gumbel, 1960),

$$C_a^{Gl}(u,v)=\exp\left\{-\left[(-\ln u)^a+(-\ln v)^a\right]^{\frac{1}{a}}\right\}, \tag{11}$$

Claytonova kopula funkce (Clayton, 1978),

$$C_a^{Cl}(u,v)=\max\left[\left(u^{-a}+v^{-a}-1\right)^{-\frac{1}{a}},0\right], \tag{12}$$

Frankova kopula funkce (Frank, 1979),

$$C_a^{Fr}(u,v)=-\frac{1}{a}\ln\left[1+\frac{\left(e^{-au}-1\right)\left(e^{-av}-1\right)}{e^{-a}-1}\right]. \tag{13}$$

[2] Demarta a Mcneil (2005) například popisují zešikmenou Studentovu kopula funkci, která sice vychází ze Studentovy kopula funkce, ale není již symetrická a tudíž nepatří do třídy eliptických kopula funkcí.

2.1 Popis metod odhadu parametrů při modelování pomocí kopula funkcí

Existují tři hlavní přístupy k odhadu parametrů při modelování pomocí kopula funkcí: EMLM (exact maximum likelihood method), IFM (inference function for margins) a CML (canonical maximum likelihood). Zatímco při použití EMLM jsou odhadovány všechny parametry současně, což může být výpočetně velmi náročné (obzvláště při odhadu vysoce dimenzionálních dat, nebo při použití složitějších marginálních funkcí), při IFM a CML jsou parametry marginálních rozdělení a parametry kopula funkce odhadnuty zvlášť. V případě IFM jsou odhadnuty nejprve parametry marginálních distribučních funkcí a na jejich základě pak parametry kopula funkce. U CML jsou parametry kopula funkce odhadnuty na základě empirických distribučních funkcí. Podrobnější vysvětlení těchto metod lze nalézt např. v (Cherubini a kol., 2004). V tomto příspěvku bude využito CML přístupu.

3 Definice normálního inverzního Gaussova rozdělení pravděpodobnosti

Normální inversní Gaussův model (dále NIG) byl ve finanční literatuře představen v (Barndorff-Nielsen, 1995). Předpokládejme parametry $\alpha > 0$, $-\alpha < \beta < \alpha$ a $\delta > 0$, pak lze $NIG(\alpha, \beta, \delta)$ rozdělení pravděpodobnost, jímž se NIG model řídí, popsat funkcí hustoty pravděpodobnosti následovně,

$$f_{NIG}(x;\mu,\alpha,\beta,\delta) = \frac{\alpha\delta}{\pi}\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta(x-\mu)\right)\frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}. \tag{14}$$

Distribuční funkce lze definovat následovně,

$$F_{NIG}(x;\mu,\alpha,\beta,\delta) = \frac{\alpha\delta}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(t-\mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2+(t-\mu)^2}}\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta(t-\mu)\right)dt. \tag{15}$$

Populační momenty tohoto rozdělení jsou shrnuty v tabulce 1.

Tabulka 1: Populační momenty NIG rozdělení

populační moment	vzorec
Střední hodnota	$\mu + \delta\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$
Směrodatná odchylka	$\alpha^2\delta\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{-\frac{3}{2}}$
Šikmost	$3\beta\alpha^{-1}\delta^{-\frac{1}{2}}\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{-\frac{1}{4}}$
Špičatost	$3\left(1+\frac{\alpha^2+4\beta^2}{\delta\alpha^2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right)$

Parametry μ, α, β a δ tohoto pravděpodobnostního rozdělení mohou být odhadnuty dvěma metodami: (i) metodou maximální věrohodnosti a (ii) metodou momentů. Použití metody maximální věrohodnosti je při odhadu parametrů NIG rozdělení časově/početně velmi náročné, vhodnější se proto jeví použití metody momentů. Položíme-li populační momenty, uvedené v tabulce č. 1, rovny momentům výběru, získáme následující odhad parametrů NIG rozdělení:

$$\mu = m - \frac{3s\sqrt{v}}{3k-4s^2-9}, \tag{16}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{3k - 4s^2 - 9}{v\left(k - \frac{5}{3}s^2 - 3\right)^2}}, \tag{17}$$

$$\beta = \frac{s\left(k - \frac{5}{3}s^2 - 3\right)}{\sqrt{v}}, \tag{18}$$

$$\delta = 3^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{v\left(k - \frac{5}{3}s^2 - 3\right)}}{3k - 4s^2 - 9}, \tag{19}$$

kde m je střední hodnota výběru, v je rozptyl výběru, s je výběrový koeficient šikmosti, k je výběrový koeficient špičatosti.

4 Charakteristika metodologie Value at Risk a zpětné testování jejího odhadu

Value at Risk (dále VaR) je metodou hodnocení rizika, která se dnes používá hlavně v oblasti finančních institucí. VaR v podstatě vyjadřuje maximální možnou ztrátu na určité hladině spolehlivosti α. Formálně ji lze tedy definovat následovně:

$$\Pr\left(\Delta\Pi_{t+\Delta t} \leq -VaR_{1-\alpha,\Delta t}\right) = 1 - \alpha, \tag{20}$$

kde $\Delta\Pi$ vyjadřuje náhodnou veličinu – zde konkrétně změnu ceny portfolia za čas Δt, $VaR_{1-\alpha,\Delta t}$ je maximální ztráta na dané hladině spolehlivosti α pro časový horizont Δt a Pr značí pravděpodobnost. Hodnota $1-\alpha$ se nazývá hladina významnosti. Lze tedy říci, že v $1-\alpha$ procentech případů bude skutečná ztráta vyšší než je hodnota VaR.

Kvalitu odhadu hodnoty VaR je potřeba (nejen z důvodu legislativních nařízení) ověřit na minulých datech. Předpokládejme, že máme model, který odhaduje hodnotu VaR na určité hladině spolehlivosti α. Pro jednoduchost dále předpokládejme, že odhadujeme hodnotu VaR pro interval jednoho dne. Při zpětném testování postupujeme tak, že pro jednotlivé dny porovnáváme hodnotu VaR určenou modelem na základě informací známých dne předchozího k uvažovanému dni a pozorovanou ztrátu uvažovaného dne. Dny, ve kterých skutečná ztráta přesáhne hodnotu VaR, se nazývají výjimky. Pokud zaznamenáme výjimky v přibližně $1-\alpha$ procentech případů, odhaduje model hodnotu VaR správně. V případě vyššího výskytu výjimek model riziko podhodnocuje, v případě nižšího počtu výjimek model riziko nadhodnocuje. Blíže se tímto postupem zabývá např. Hull (2007) nebo Resti a Sironi (2007).

V podstatě tímto postupem ověřujeme, že pravděpodobnost výskytu výjimky je rovna hodnotě $1-\alpha$, tedy hladině významnosti. Tuto rovnost je potřeba statisticky otestovat. Pro potřeby statistického testu lze využít buď binomické rozdělení nebo vhodnější test navržený Kupiecem (Kupiec, 1995), který je oboustranný a tudíž testuje nevhodnost modelu jak z pohledu podhodnocení tak nadhodnocení rizika. Nulovou hypotézou tedy je, že pozorovaná pravděpodobnost vzniku výjimky $\pi_{poz} = \frac{n_1}{n}$, kde n_1 je počet výjimek v n pozorováních, je rovna očekávané pravděpodobnosti vzniku výjimky $\pi_{ock} = 1-\alpha$,

$$H_0 : \pi_{poz} = \pi_{ock}, \tag{21}$$

alternativní hypotézou je, že se tyto pravděpodobnosti nerovnají,

$$H_A : \pi_{poz} \neq \pi_{ock}. \tag{22}$$

Věrohodnostní poměr pak lze vyjádřit následovně,

$$LR_{knp} = -2\ln\left[\frac{\pi_{ock}^{n_1}\left(1-\pi_{ock}\right)^{n_0}}{\pi_{poz}^{n_1}\left(1-\pi_{poz}\right)^{n_0}}\right], \tag{23}$$

kde n_1 je skutečný počet výjimek, n_0 je počet pozorování označených jako nula (nedochází tedy k výjimce, $n_0 = n - n_1$), π_{ock} je očekávaná pravděpodobnost vzniku výjimky (tedy $\pi_{ock} = 1-\alpha$) a π_{poz} je pozorovaná pravděpodobnost vzniku výjimky, $\pi_{poz} = \frac{n_1}{n_0 + n_1}$.

Testovací statistiku lze přepsat do tvaru:

$$LR_{knp} = 2\ln\left[\left(1-\frac{n_1}{n_0+n_1}\right)^{n_0}\left(\frac{n_1}{n_0+n_1}\right)^{n_1}\right] - 2\ln\left[\left(1-\pi_{ock}\right)^{n_0}\pi_{ock}^{n_1}\right], \tag{24}$$

kde proměnné mají stejný význam jako v předchozí rovnici. Věrohodnostní poměr LR_{knp} má asymptoticky chí-kvadrát rozdělení s jedním stupněm volnosti,

$$LR_{knp} \approx \chi^2(1). \tag{25}$$

Druhým problémem při zpětném testování je shlukování výjimek (tzv. bunching). Předpokladem zpětného testování je, že výskyt pozorovaných výjimek je v čase nezávislý a výjimky jsou rovnoměrně rozprostřeny v čase. Testováním tohoto předpokladu se zabýval Christoffersen (1998), který navrhuje testovat nahodilost výskytu výjimek v čase. Pro nulovou hypotézu,

$$H_0 : \pi_{01} = \pi_{11}, \tag{26}$$

kde π_{01} značí pravděpodobnost vzniku výjimky, pokud jí nepředcházela výjimka, a π_{11} značí pravděpodobnost, že po výjimce opět nastane výjimka, se opět jedná o testovací statistiku založenou na věrohodnostním poměru:

$$LR_{nez} = -2\ln\left[\frac{\pi_{poz}^{n_1}\left(1-\pi_{poz}\right)^{n_0}}{\pi_{01}^{n_{01}}\left(1-\pi_{01}\right)^{n_{00}}\pi_{11}^{n_{11}}\left(1-\pi_{11}\right)^{n_{10}}}\right],^{3} \tag{27}$$

kde n_{ij} je počet pozorování, pro které platí $I_t = j \wedge I_{t-1} = i$, kde I_t je časová řada výjimek. Pozorovaný počet výjimek lze tedy vyjádřit jako $n_1 = n_{01} + n_{11}$ a pozorovaný počet „nevýjimek“ lze vyjádřit jako $n_0 = n_{00} + n_{10}$. Pro pravděpodobnosti dále platí $\pi_{ij} = \Pr\left(I_t = j \middle| I_{t-1} = i\right)$, $\pi_{poz} = \frac{n_{01}+n_{11}}{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}}$. Rovněž u tohoto testu má LR_{nez} asymptoticky chí-kvadrát rozdělení s jedním stupněm volnosti,

$$LR_{nez} \approx \chi^2(1). \tag{28}$$

Christoffersenův test nezávislosti testuje shlukování výjimek pouze na základě závislosti vyjádřené mezi dvěma po sobě jdoucími pozorováními. Alternativní test nezávislosti lze definovat na základě rozšíření Kupiecova testu doby do první výjimky (TUFF testu), viz Haas (2001).[4] Předpokládejme následující nulovou hypotézu,

---

[3] V případě, kdy $n_{11} = 0$, což se snadno může stát při malém počtu pozorování nebo vysoké hladině spolehlivosti, se testovací statistika spočte jako $LR_{nez} = -2\ln\left[\frac{\pi_{poz}^{n_1}\left(1-\pi_{poz}\right)^{n_0}}{\pi_{01}^{n_{01}}\left(1-\pi_{01}\right)^{n_{00}}}\right]$.

[4] Testováním doby mezi jednotlivými výjimkami se zabývali i Christoffersen a Pelletier (2004), kteří navrhli nulovou hypotézou, že doba mezi jednotlivými výjimkami nevykazuje paměťový efekt a střední doba mezi

$$H_0: \text{„Výjimky jsou vzájemně nezávislé.“} \tag{29}$$

Pro n_1 výjimek pak lze definovat následující věrohodnostní poměr,

$$LR_{ktn} = -2\ln\left[\frac{\pi_{ock}\left(1-\pi_{ock}\right)^{T-1}}{T^{-1}\left(1-T^{-1}\right)^{T-1}}\right] - \sum_{i=2}^{n_1}\left\{2\ln\left[\frac{\pi_{ock}\left(1-\pi_{ock}\right)^{T_i-1}}{T_i^{-1}\left(1-T_i^{-1}\right)^{T_i-1}}\right]\right\}, \tag{30}$$

kde T_i je doba mezi i-tou a $i-1$ výjimkou, T značí dobu do nastání první výjimky. Jedná se o sumu statistik Kupiecova TUFF testu pro všechny výjimky, a testovací statistika LR_{ktn} má proto chí-kvadrát rozdělení s n_1 stupni volnosti,

$$LR_{ktn} \approx \chi^2\left(n_1\right). \tag{31}$$

5 Výsledky

Vstupní data použitá v tomto příspěvku byly čtyři dvojice zahraničních akciových indexů a příslušných měnových kurzů. Konkrétně byly uvažovány americký Down Jones Industrial Average (DJI) spolu s kurzem amerického dolaru vůči euru (USD), britský FTSE 100 (FTSE) spolu s kurzem britské libry vůči euru (GBP), japonský Nikkei 225 (N225) spolu s kurzem japonského jenu vůči euru (JPY) a švýcarský Swiss Market Index (SMI) spolu s kurzem švýcarského franku vůči euru (CHF). Data pro zpětné testování byla uvažována za předchozích dvacet let (od ledna 1991 do srpna 2011, 5 376 denních spojitých výnosů), přičemž chybějící hodnoty byly interpolovány. Základní charakteristiky spojitých výnosů jednotlivých časových řad jsou shrnuty v tabulce 2.

Tabulka 2: Základní charakteristiky spojitých výnosů vstupních časových řad

charakteristika	DJI	FTSE	N225	SSMI	USD	GBP	JPY	CHF
minimum	-8,20 %	-9,26 %	-12,11 %	-8,38 %	-4,06 %	-3,89 %	-3,90 %	-4,58 %
maximum	10,51 %	9,38 %	10,09 %	10,79 %	4,82 %	2,83 %	5,93 %	3,26 %
stř. hodnota	0,03 %	0,02 %	-0,02 %	0,03 %	0,00 %	0,00 %	0,01 %	0,01 %
medián	0,05 %	0,04 %	0,00 %	0,07 %	-0,01 %	0,00 %	-0,03 %	0,00 %
směr. odch.	1,10 %	1,13 %	1,47 %	1,17 %	0,65 %	0,48 %	0,76 %	0,36 %
šikmost	-0,105	-0,111	-0,323	-0,128	0,142	-0,421	0,415	-0,098
špičatost	11,740	9,644	8,283	9,323	5,808	7,863	6,937	17,593

Lze pozorovat, že spojité výnosy vykazují relativně vysokou špičatost a nenulovou šikmost. Z tohoto důvodu lze předpokládat, že normální rozdělení nebude vhodným modelem marginálních rozdělení. Co se týká srovnání výnosů akciových indexů a měnových kurzů, lze pozorovat, že akciové indexy jsou více volatilní, což dokumentuje jednak hodnota směrodatné odchylky a rovněž vyšší rozpětí mezi minimálním a maximálním výnosem. Pozorovaná korelace mezi výnosem akciového indexu a měnového kurzu je však vždy záporná, což způsobí, že výnosy přepočtené do eur budou méně volatilní než v původní měně.

Pro účely modelování jsou uvažovány dva modely marginálních rozdělení: (i) normální rozdělení a (ii) normální inversní Gaussův model. Pro odhad parametrů je využita metoda CML. Parametry marginálních rozdělení i kopula funkcí jsou pro jednotlivé dny odhadnuty vždy z posledních 250 pozorování (v případě NIG modelu je vzhledem k modelování vyšších momentů pro odhad parametrů využito posledních 2 000 dní). Následně je simulováno

dvěma výjimkami je $\dfrac{1}{\pi_{ock}}$. Pro tuto nulovou hypotézu je však obtížné stanovit kritickou hodnotu testovací statistiky.

100 000 scénářů a hodnota VaR je určena jako příslušný kvantil simulovaného rozdělení pravděpodobnosti výnosu akciového indexu v eurech.

Počty pozorovaných výjimek pro normální rozdělení a různé kopula funkce jsou sumarizovány v tabulce 3.

Tabulka 3: Počty pozorovaných výjimek pro normální rozdělení a Gaussovu / Studentovu / Claytonovu / Gumbelovu / Frankovu kopula funkci. Tučně zvýrazněné jsou na 10% hladině významnosti statisticky akceptovatelné počty výjimek. Kurzívou je zobrazen počet výjimek, který se nejvíce blíží předpokládanému.

Portfolio	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.15$
předpoklad	16,88	33,76	168,8	506,4
DJI & USD	47/*41*/42/44/46	63/60/*55*/56/60	**173**/**174**/**162**/**160**/***172***	471/***477***/452/450/471
FTSE & GBP	57/56/*50*/52/54	80/78/*74*/75/79	**190**/191/***181***/**186**/**190**	456/*464*/449/448/453
N225 & JPY	38/35/*28*/31/34	53/50/***40***/**43**/52	**162**/**164**/127/131/***165***	437/443/375/379/*447*
SSMI & CHF	56/55/46/*45*/50	82/81/*71*/*71*/79	**186**/**184**/**158**/***161***/**185**	450/449/403/403/*455*
počet stat. význ. případů	0/0/0/0/0	0/0/1/1/0	4/3/3/3/4	0/1/0/0/0
počet nejpřesnějších př.	0/1/2/1/0	0/0/4/1/0	0/0/1/1/2	0/2/0/0/2

Z výsledků je zřejmé, že normální rozdělení skutečně není pro modelování finančních časových řad vhodné. Při odhadu VaR na 15% hladině významnosti je počet pozorovaných výjimek nižší než je předpoklad – model riziko nadhodnocuje. Pro 1% a 0,5% hladiny významnosti je počet výjimek dvounásobný až třínásobný oproti předpokladu a model tudíž nelze statisticky akceptovat. Právě hladiny významnosti 1 % a 0,5 % jsou zakotveny v legislativách regulujících finanční instituce, je tedy zřejmé, že tyto modely nejsou pro modelování rizika finančních institucí použitelné. Na druhou stranu pro 5% hladinu významnosti je model normálního rozdělení a Gaussovy kopula funkce, tedy sdružené normální rozdělení, dostatečně přesný. Rovněž spojením normálního rozdělení a Frankovy kopula funkce lze získat model pro dostatečně přesný odhad rizika na 5% hladině významnosti.

Počty pozorovaných výjimek pro NIG rozdělení a různé kopula funkce jsou sumarizovány v tabulce 4.

Tabulka 4: Počty pozorovaných výjimek pro NIG model a Gaussovu / Studentovu / Claytonovu / Gumbelovu / Frankovu kopula funkci. Tučně zvýrazněné jsou na 10% hladině významnosti statisticky akceptovatelné počty výjimek. Kurzívou je zobrazen počet výjimek, který se nejvíce blíží předpokládanému.

Portfolio	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.15$
předpoklad	16,88	33,76	168,8	506,4
DJI & USD	**24**/**23**/***21***/**22**/**22**	***35***/**36**/**36**/**37**/**36**	**190**/196/***172***/**179**/193	560/567/544/*542*/561
FTSE & GBP	25/**23**/***20***/**22**/25	45/44/***43***/46/44	193/194/***184***/**190**/191	559/566/*545*/548/561
N225 & JPY	**20**/**18**/***17***/**20**/**20**	***33***/***33***/**28**/**31**/***33***	***162***/**160**/126/136/**158**	***517***/**525**/444/445/**521**
SSMI & CHF	***17***/***17***/**14**/**16**/***17***	**41**/**42**/***33***/**35**/**36**	206/197/**172**/***169***/194	575/584/***535***/**536**/580
počet stat. význ. případů	3/4/4/4/3	3/3/4/3/3	2/1/3/3/1	1/1/1/1/1
počet nejpřesnějších př.	1/1/3/0/1	2/1/2/0/1	1/0/2/1/0	1/0/2/1/0

Lze vidět, že při použití NIG rozdělení je pro hladiny významnosti 1 % a 0,5 % dosahováno lepších výsledků. Nejvhodnější je spojení NIG rozdělení a Claytonovy kopula funkce, kdy lze počty výjimek u odhadu VaR na hladinách významnosti 1 % a 0,5 % akceptovat pro všechny zvolené akciové indexy. Rovněž Studentova a Gumbelova kopula funkce dosahuje dobrých výsledků – počty výjimek nelze statisticky akceptovat pouze u modelování britského indexu FTSE pro odhad VaR na 1% hladině významnosti. Tyto modely jsou tedy vhodné pro modelování rizika na nízkých hladinách významnosti. Ovšem pro vyšší hladiny významnosti tyto modely již tak přesné nejsou. Pro hladinu významnosti 5 % je nejpřesnější Claytonova a Gumbelova kopula funkce – počty výjimek lze statisticky akceptovat pro indexy DJI, FTSE a SSMI. Pro index N225 jsou počty výjimek nižší, než je předpokládáno a model tak riziko nadhodnocuje. Pro 15% hladinu významnosti již modely nejsou přesné – pouze jeden ze čtyř indexů je modelován dostatečně přesně.

Modely byly rovněž testovány na shlukování výjimek. Při použití přísnějšího Haasova testu byla pro všechny modely i uvažované indexy zamítnuta nulová hypotéza, že výjimky jsou v čase nezávislé (p-hodnoty tohoto statistického testu se pohybovaly v řádech setiny procenta). P-hodnoty Christoffersenova testu pro normální rozdělení a hladinu významnosti odhadu VaR 5 % jsou uvedeny v tabulce 5.

Tabulka 5: P-hodnoty Christoffersenova testu nezávislosti výjimek pro normální rozdělení a Gaussovu / Studentovu / Claytonovu / Gumbelovu / Frankovu kopula funkci pro $\alpha = 0.05$. Hodnoty jsou uvedeny v procentech.

Portfolio	P-hodnoty
DJI & USD	27/28/39/35/59
FTSE & GBP	0/0/0/0/0
N225 & JPY	23/26/15/20/16
SSMI & CHF	0/0/0/0/0

Z tabulky lze vidět, že pouze pro indexy DJI a N225 může být potvrzena nulová hypotéza nezávislosti výskytu výjimky na tom, zda ji předcházela nebo nepředcházela výjimka. Z tabulky 6, ve které jsou uvedeny p-hodnoty téhož testu pro modely s NIG rozdělením a různé hladiny významnosti, lze vidět, že totéž obecně platí i pro NIG model (ovšem ne pro všechny hladiny významnosti, naopak u indexů FTSE a SSMI lze nulovou hypotézu pro $\alpha = 0.005$ taktéž akceptovat). Obecně lze tedy říci, že shlukování výjimek je pro tyto modely problém. Shlukování výjimek je způsobeno tím, že výnosy finančních časových řad nejsou homoskedastické ale heteroskedastické a v obdobích zvýšené volatility se modely přizpůsobují této nové volatilitě pomalu. Možným řešením toho problému je použití některého modelu volatility typu GARCH.

Tabulka 6: P-hodnoty Christoffersenova testu nezávislosti výjimek pro NIG model a Gaussovu / Studentovu / Claytonovu / Gumbelovu / Frankovu kopula funkci. Hodnoty jsou uvedeny v procentech.

Portfolio	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.15$
DJI & USD	55/57/60/58/58	39/37/37/36/37	28/16/59/37/12	0/0/0/0/0
FTSE & GBP	53/57/11/13/18	0/2/2/0/2	0/0/0/0/0	0/0/0/0/0
N225 & JPY	0/8/7/0/0	0/0/0/0/0	7/11/29/14/18	53/42/26/34/56
SSMI & CHF	7/7/5/6/7	1/2/4/1/6	0/0/0/0/0	0/0/0/0/0

6 Závěr

Modelování výnosů a rizika je bezesporu nejen velmi důležitou, ale i obtížnou činností nejen finančních institucí. Tento příspěvek byl zaměřen na ověření přesnosti odhadu rizika při použití různých modelů složených z normálního inversního Gaussova modelu, respektive normálního rozdělení, a jednotlivých kopula funkcí. Co se týče normálního rozdělení, z výsledků je patrné, že odhad hodnoty Value at Risk je přesný pouze pro hladinu významnosti 5 %. Pro tuto hladinu významnosti je dostatečné sdružené normální rozdělení pravděpodobnosti – normální rozdělení sdružené Gaussovou kopula funkcí. Pro přesný odhad hodnoty Value at risk na nižších hladinách významnosti je potřeba použít jiné marginální rozdělení výnosů. V tomto příspěvku použitý NIG model se ukázal jako dostatečně přesný. Na základě získaných výsledků lze jako nejvhodnější určit Claytonovu kopula funkci. Rovněž použitím Studentovy kopula funkce bylo dosaženo dobrých výsledků. Problematické je u všech modelů shlukování výjimek, kdy výjimky nelze statisticky považovat za náhodně se vyskytující v čase.

References

[1] Alexander, C. and Sheedy, E., 2008. Developing a stress testing framework based on market risk models. *Journal of Banking and Finance,* 32(10), p. 2220-2236.

[2] Barndorff-Nielsen, O. E., 1995. *Normal inverse Gaussian distributions and the modeling of stock returns.* Aarhus : Aarhus University. Doctoral dissertation.

[3] Clayton, D. G., 1978. A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika,* 65(1), p. 141-151.

[4] Demarta, S. and McNeil, A. J., 2005. The t copula and related copulas. *International Statistical Review,* 73(1), p. 111-129.

[5] Frank, M. J., 1979. On the simultaneous associativity of F(x, y) and x+y-F(x, y). *Aequationes Mathematicae,* 19(1), p. 194-226.

[6] Gumbel, E. J., 1960. Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association,* 55, p. 698-707.

[7] Haas, M., 2001. New Methods in Backtesting. Financial Engineering Research Center, Working Paper.

[8] Hull, J., 2007. *Risk Management and Financial Institutions*. Upper Saddle River: Prentice Hall.

[9] Cherubini, G., Luciano, E. and Vecchiato, W., 2004. *Copula Methods in Finance*. Chichester : Wiley.

[10] Christoffersen, P. F., 1998. Evaluating interval forecasts. *International Economic Review,* 39(4), p. 841-862.

[11] Christoffersen, P. F. and Pelletier, D., 2004. Backtesting value-at-risk: A duration-based approach. *Journal of Financial Econometrics,* 2(1), p. 84-108.

[12] Kresta, A., 2010. Modelling of foreign asset returns for a Czech investor. In: *Managing and Modelling of Financial Risks (*Dluhošová, D., eds.). Ostrava: VŠB-TU Ostrava, p. 196-202.

[13] Kresta, A., 2012. Backtesting of market risk estimation assuming various copula functions. In: *Proceedings of the 30th International Conference Mathematical methods in economics 2012* (Ramík, J. and Stavárek, D., eds.). Karviná: Silesian university, School of Business Administration, p. 484-489.

[14] Kresta, A. and Tichý, T., 2012. International Equity Portfolio Risk Modeling: The case of NIG model and ordinary copula functions. *Finance a úvěr – Czech Journal of Economics and Finance,* 62(2), p. 141–161.

[15] Kupiec, P., 1995. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivative,* 3(2), p. 73-84.

[16] Nelsen, R. B., 2006. *An Introduction to Copulas*. 2nd ed. New York: Springer.

[17] Rank, J., 2006. *Copulas: From Theory to Application in Finance*. London: Risk Books.

[18] Resti, A. and Sironi, A., 2007. *Risk management and shareholders´ Value in banking: from risk measurement models to capital allocation policies*. Chichester: Wiley.

[19] Sklar, A., 1959. Fonctions de repartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris*, 8, p. 229-231.

[20] Tichý, T., 2010. Posouzení odhadu měnového rizika portfolia pomocí Lévyho modelů. *Politická ekonomie,* 58(4), p. 504-521.