

# Life Expectancy Development and Prediction for Selected European Countries

## Vývoj a predikce střední délky života vybraných evropských zemí

Pavla Jindrová, Ondřej Slavíček<sup>1</sup>

### Abstract

The population ageing is a problem of many European countries, and it brings financial risk in most of economic areas, such as social, pension, health, etc. The development and the prediction of life expectancy in selected European countries is the content of this article. The Lee-Carter model is applied here. The first section introduces the method of calculation of the model's parameters as well as the values of the coefficients estimated for the real data from the mortality tables of selected European countries among the years 1950-2009. This allowed us to predict the development of specific mortality rates and consequently life expectancy. Thereafter, a prediction of life expectancy for men and women of selected European countries for the period 2010-2029 is carried out and a 95% prediction interval for this period is determined. Finally, already known values of life expectancy are compared with predicted values in this article.

### Key words

Ageing, mortality rate, life expectancy, Lee-Carter model, prediction.

**JEL Classification:** C22, J11.

## 1. Úvod

Česká republika, stejně jako většina vyspělých zemí, musí řešit specifika, vyplývající ze stárnutí populace a dlouhověkosti. Tato problematika souvisí s udržení odpovídající životní úrovně obyvatelstva, se zdravotní péčí, dále s důchodovým zabezpečením a v neposlední řadě tato problematika přináší zvyšující se riziko pro životní pojištění. Porovnáme-li např. střední délku života na našem území v roce 1920 a 2011, pak došlo k prodloužení střední délky života z přibližně 50 let na téměř 75 let u mužů a dokonce 80 let u žen v roce 2011. Vedle prodloužování střední délky života je potřeba také zmínit snižující se porodnost. Demografický vývoj je podkladem pro dlouhodobé prognózy vývoje počtu obyvatel, které predikují zvyšující se nárůst starších obyvatel.

Je pochopitelné, že tento problém není možné řešit bez dostatečných podkladů, jejichž součástí jsou modely úmrtnosti populace příslušného státu.

Úmrtnost je jedním z demografických ukazatelů udávající podíl zemřelých za stanovené období z určité skupiny osob.

Při modelování úmrtnosti je jednou ze základních využívaných veličin specifická míra úmrtnosti. Vypočítá se podle vzorce

$$m_{x,t} = \frac{M_{x,t}}{S_{x,t}}$$

<sup>1</sup> Mgr. Pavla Jindrová, Ph.D., Mgr. Ondřej Slavíček, Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, Ústav matematiky a kvantitativních metod, Studentská 84, 532 10 Pardubice, Pavla.Jindrova@upce.cz, Ondrej.Slavicek@upce.cz.

kde

$m_{x,t}$  je specifická míra úmrtnosti ve věku  $x$  a čase  $t$ ,

$M_{x,t}$  je počet zemřelých v dokončeném věku  $x$  v roce  $t$ ,

$\bar{S}_{x,t}$  je střední stav  $x$ -letých osob v roce  $t$ .

Mluvíme-li o problému dlouhověkosti, pak lze tento problém zařadit mezi systémová rizika. Největším problémem např. v České republice by mohla být dlouhověkost pro důchodové pojišťovny a penzijní fondy. Vzhledem k demografickému vývoji, který potvrzuje zvyšující se průměrný věk populace, by současný systém financování důchodů nebyl možný. Připravovaná důchodová reforma by měla pomoci celý systém důchodového zabezpečení stabilizovat.

Pomocí demografických metod na základě pozorování rozsáhlých populačních souborů (celá populace, pojistné kmene, apod.) lze odhadnout pravděpodobnosti úmrtí pro muže a ženy jednotlivých věků a z toho vyplývající další důležité charakteristiky. [9]

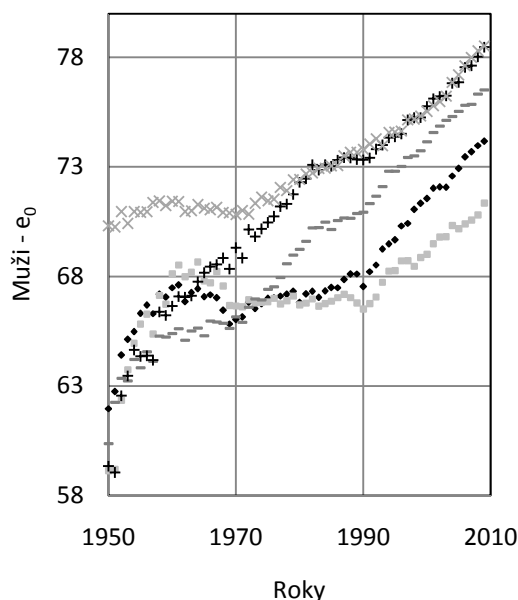
Pro výpočty jednotlivých charakteristik z úmrtnostních tabulek pro daný rok, které vlastně představují model úmrtnosti, jsou základem pravděpodobnosti úmrtí ve věku  $x$  označené  $q_x$  a dále pravděpodobnosti dožití se věku  $x$  označené  $p_x$ , kde platí, že  $q_x + p_x = 1$ . Hodnota  $q_x$  se vypočítá na základě sledovaného stavu populace v daném roce  $t$  podle vztahu

$$q_x = 1 - e^{-m_x}.$$

Na základě hodnot  $q_x$  a  $p_x$  se určují zbývající veličiny z úmrtnostních tabulek. Jednou z nich je i střední délka života ve věku  $x$ , označená  $e_x$ .

Střední délka života nebo také naděje dožití bývá definována jako průměrný počet let, které zbývá osobě ve věku  $x$  ještě prožít. Vzhledem k rostoucí dlouhověkosti ve vyspělých zemích je jasné, že tato hodnota narůstá. Pro analyzované státy je vývoj střední délky života při narození znázorněn na obrázku 1 pro muže a na obrázku 2 pro ženy. Data byla získána na [www.mortality.org](http://www.mortality.org) a jsou pro období 1950-2009.

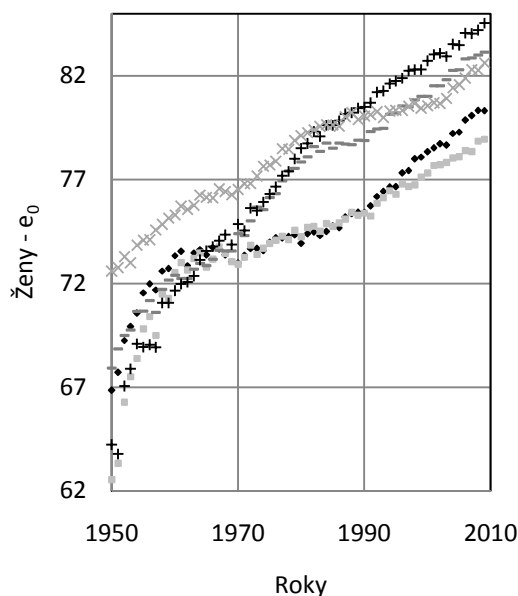
Obrázek 1: Střední délka života pro muže



• ČR   ■ SR   - Finsko   + Španělsko   × Nizozemí

Zdroj: vlastní zpracování na základě dat z [5]

Obrázek 2: Střední délka života pro ženy



• ČR   ■ SR   - Finsko   + Španělsko   × Nizozemí

Zdroj: vlastní zpracování na základě dat z [5]

Z obou obrázků je patrné, že střední délka života jak u mužů, tak u žen má rostoucí trend u všech vybraných států. Pro lepší přehlednost jsou v tabulce 1 uvedeny hodnoty střední délky života při narození pro muže a pro ženy u jednotlivých zemí ve vybraných letech.

Tabulka 1: Střední délka života při narození pro muže a ženy ve vybraných letech

rok	muži					ženy				
	ČR	SR	Finsko	Španělsko	Nizozemí	ČR	SR	Finsko	Španělsko	Nizozemí
1950	61,97	59,14	60,37	59,35	70,32	66,85	62,55	67,92	64,23	72,59
1970	66,04	66,66	66,16	69,31	70,83	73,00	72,93	74,40	74,86	76,52
1990	67,54	66,52	70,94	73,33	73,82	75,41	75,39	78,88	80,51	80,08
2009	74,18	71,36	76,51	78,48	78,53	80,32	78,95	83,14	84,55	82,64

Zdroj: vlastní zpracování na základě dat z [4]

Jak je patrné z obrázků 1 a 2 a také z tabulky 1, největší rozdíly střední délky života mezi jednotlivými státy připadají na začátek sledovaného období, tj. kolem roku 1950, a to jak u mužů, tak u žen. Např. u střední délky života pro muže je mezi hodnotou pro SR a Nizozemím více než 10 let. Na konci sledovaného období jsou tyto rozdíly menší.

Sledování vývoje střední délky života je důležité pro predikce jejího dalšího vývoje. Tato problematika pevně souvisí s modelováním a predikovaním úmrtnosti.

Užitečným nástrojem při predikování úmrtnosti jsou jak modely parametrické (zákony úmrtnosti), tak neparametrické. V další části bude pozornost věnována neparametrické metodě – modelu Lee-Carter, který je jednou z metod, která je velmi často využívána jak demografy, tak aktuary v oblasti modelování a predikování úmrtnosti. Nejprve bude uveden teoretický základ této metody spolu s postupem odhadů jednotlivých parametrů tohoto modelu. Následně bude model využit pro modelování úmrtnosti pro vybrané evropské země, kterými jsou Česká republika, Slovensko, Finsko, Španělsko a Nizozemí a tyto výsledky budou mezi sebou porovnány. V poslední části tohoto příspěvku budou prezentovány predikce střední délky života při narození v analyzovaných zemích získané aplikací Lee-Carterova modelu.

## 2. Lee-Carterův model

Pro predikce vývoje míry úmrtnosti se v poslední době často využívá metoda popsaná v roce 1992 Ronaldem Lee a Lawrancem Carterem v článku „*Modelling and forecasting US mortality*“. [6] Tento model popisuje změny specifické míry úmrtnosti podle věku v závislosti na časovém indexu. Předpokládá se, že přirozený logaritmus specifické míry úmrtnosti jde rozložit na tři složky. První složku, která je nezávislá na čase, druhou složku, která je závislá na čase a popisuje celkovou míru úmrtnosti, a třetí složku, která je opět závislá na čase a popisuje vliv určitého věku na specifickou míru úmrtnosti v závislosti na změně celkové míry úmrtnosti. Matematický model Lee-Carterova modelu lze najít například v [1], [6], má tvar:

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}, \quad (1)$$

kde:

$m_{x,t}$  je specifická míra úmrtnosti ve věku  $x$  a čase  $t$ ,

$\alpha_x$  vypočítáme jako aritmetický průměr z hodnot  $\ln m_{x,t}$  přes všechna  $t$ . Jsou to tedy aritmetické průměry jednotlivých řádků zlogaritmané matice  $m_{x,t}$ , hodnoty  $e^{\alpha_x}$  představují základní tvar specifické míry úmrtnosti podle věků,

$\beta_x$  představuje vliv jednotlivých věků na změnu specifické míry úmrtnosti,

$k_t$  reprezentuje časový trend,

$\varepsilon_{x,t}$  je náhodná chyba s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem  $\sigma^2$ .

Dalšími předpoklady jsou podmínky kladené na  $k_t$  a  $\beta_x$  ve tvaru:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} k_t = 0 \text{ a } \sum_{x=x_1}^{x_n} \beta_x = 1. \quad (2)$$

Existuje několik postupů pro odhady jednotlivých parametrů modelu, které se liší především v postupu používaném pro odhad parametru  $\beta_x$ . Původně navržená metoda popsaná například v [1], [6], [7] získává odhady parametru  $\beta_x$  pomocí SVD (Singular value decomposition) matice  $[\ln m_{x,t} - \alpha_x]$ . To je však početně náročné a proto v roce 2005 přišli Haberman a Russolillo v článku „*Lee-Carter mortality forecasting: application to the Italian population*“ [4] s metodou, která využívá pro odhad parametru  $\beta_x$  lineární regresi. Touto metodou bylo postupováno i při výpočtech v tomto příspěvku.

## 2.1 Algoritmus výpočtu

Prvním krokem algoritmu je odhad parametru  $\alpha_x$ . Ten vypočítáme pro všechna  $x$  jako:

$$\alpha_x = \frac{1}{T} \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln(m_{x,t}), \quad (3)$$

kde  $T$  je rovno počtu prvků posloupnosti  $t_1, \dots, t_n$ . Jedná se tedy o aritmetické průměry řádků matice  $[\ln(m_{x,t})]$ . Proměnná  $n$  představuje rozsah analyzovaného souboru.

Druhým krokem algoritmu je odhadnutí hodnot  $k_t$ . Ty odhadneme jako součty hodnot v jednotlivých sloupcích matice  $[\ln(m_{x,t}) - \alpha_x]$ , tedy

$$k_t = \sum_{x=x_1}^{x_n} (\ln(m_{x,t}) - \alpha_x). \quad (4)$$

Třetím krokem je odhad parametru  $\beta_x$ . K tomu využijeme lineární regresi bez absolutního členu. Za závisle proměnnou volíme hodnoty  $(\ln(m_{x,t}) - \alpha_x)$ , za nezávisle proměnnou hodnoty  $k_t$ .

Posledním krokem algoritmu je přepočítání hodnot  $k_t$  pro všechna  $t$  tak, aby platila rovnost (5), která popisuje shodu skutečného a očekávaného počtu úmrtí v jednotlivých letech:

$$\sum_{x=x_1}^{x_n} d_{x,t} = \sum_{x=x_1}^{x_n} (e_{x,t} \cdot e^{\alpha_x + \beta_x k_t}). \quad (5)$$

## 2.2 Predikce budoucích hodnot

Jestliže jsou odhadnuty všechny parametry modelu, lze přistoupit k predikci hodnot  $m_{x,t}$  pro  $t > t_n$ . K tomu je zapotřebí predikovat hodnoty  $k_t$  pro  $t > t_n$ . V článku [6], napsaném Lee a Carterem, je pro tuto predikci využit model ARIMA(0,1,0). Jedná se o autoregresní integrovaný proces klouzavých průměrů řádu (0,1,0). Predikce hodnot  $k_t$  pro  $t > t_n$  je v tomto případě provedena na základě hodnot  $k_t$  pro  $t = t_1, \dots, t_n$  což lze zapsat jako:

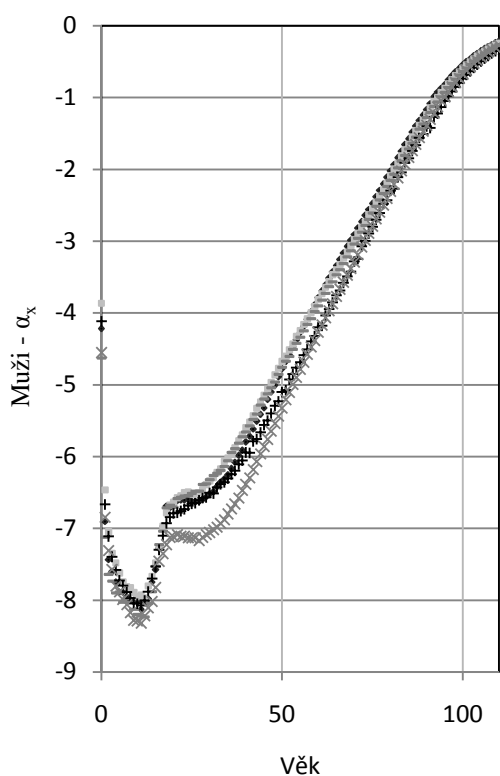
$$\{k_t: t \in \langle t_1; t_n \rangle\} \rightarrow \{k_{t_n+s}: s > 0\}. \quad (6)$$

V tomto článku bude však na základě analýzy autokorelační a parciální autokorelační funkce posloupnosti hodnot  $k_t$  použit model ARIMA(1,0,0), který lépe odpovídá zkoumaným datům.

### 3. Aplikace Lee-Carter modelu na reálná data

Odhady jednotlivých parametrů Lee-Carterova modelu zvlášť pro muže a ženy ve vybraných evropských zemích byly získány na základě specifické míry úmrtnosti podle věku pro reálná data, která byla získána na internetových stránkách [www.mortality.org](http://www.mortality.org). Na těchto internetových stránkách jsou zveřejněny úmrtnostní tabulky pro vybrané státy. Pro tuto analýzu byla vybrána data z úmrtnostních tabulek pro muže a ženy České republiky, Slovenska, Finska, Španělska a Nizozemí, a to za období 1950-2009. Z těchto zveřejněných informací byly podle vztahu (3) vypočteny hodnoty parametru  $\alpha_x$  z Lee-Carterova modelu. Tento parametr vyjadřuje obecnou vlastnost úmrtnosti v daném věku. Vývoj parametru  $\alpha_x$  pro jednotlivé země je zobrazen na obrázku 3 a 4 zvlášť pro muže a pro ženy, a to pro jednotlivé věky 0 až 110+ let, kde 110+ znamená, že do této kategorie jsou zahrnuty kromě věku 110 let také všechny vyšší věky než 110.

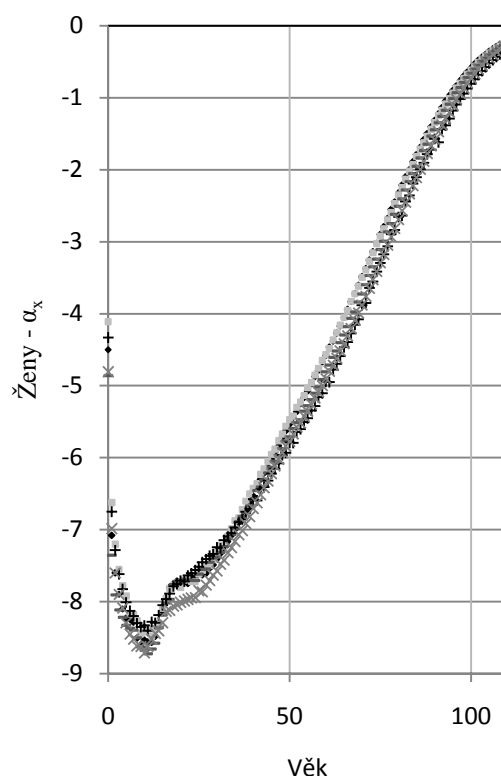
Obrázek 3: Odhad parametru  $\alpha_x$  pro muže



• ČR ■ SR ▲ Finsko + Španělsko × Nizozemí

Zdroj: vlastní zpracování na základě vlastních výpočtů

Obrázek 4: Odhad parametru  $\alpha_x$  pro ženy



• ČR ■ SR ▲ Finsko + Španělsko × Nizozemí

Zdroj: vlastní zpracování na základě vlastních výpočtů

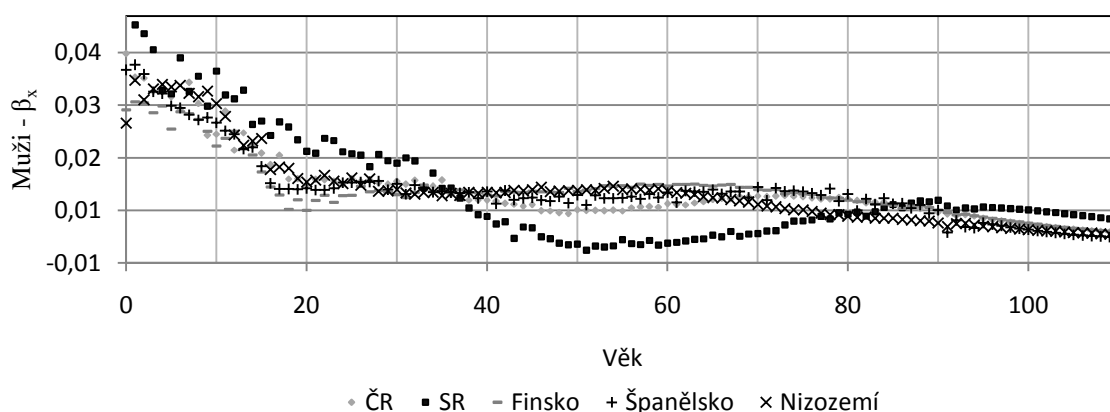
Z obrázků 3 a 4 lze vidět, že odhady parametru  $\alpha_x$  pro muže dosahují vyšších hodnot než pro ženy. Lze tedy říci, že pravděpodobnost úmrtí u mužů v daném věku je větší než pravděpodobnost úmrtí u žen, a to ve všech analyzovaných státech.

Z obrázku 3 lze vyčíst, že pravděpodobnost úmrtí u mužů v jednotlivých státech se příliš neliší kromě Nizozemí, a to přibližně pro věky 25-55 let, kde v Nizozemí je tato pravděpodobnost viditelně nižší. Mimo tento věkový interval je vývoj pravděpodobnosti úmrtí u mužů téměř analogický. Z obrázku 4 lze vyčíst, že největší rozdíly v pravděpodobnosti úmrtí u žen v jednotlivých státech je přibližně pro věky 20-30 let (i když tento rozdíl není tak velký jako u mužů). Pro zbývající věky se pravděpodobnost úmrtí v jednotlivých zemích vyvíjí analogicky.

Na obrázcích 5 a 6 jsou zobrazeny odhady parametru  $\beta_x$  pro muže a pro ženy z vybraných zemí.

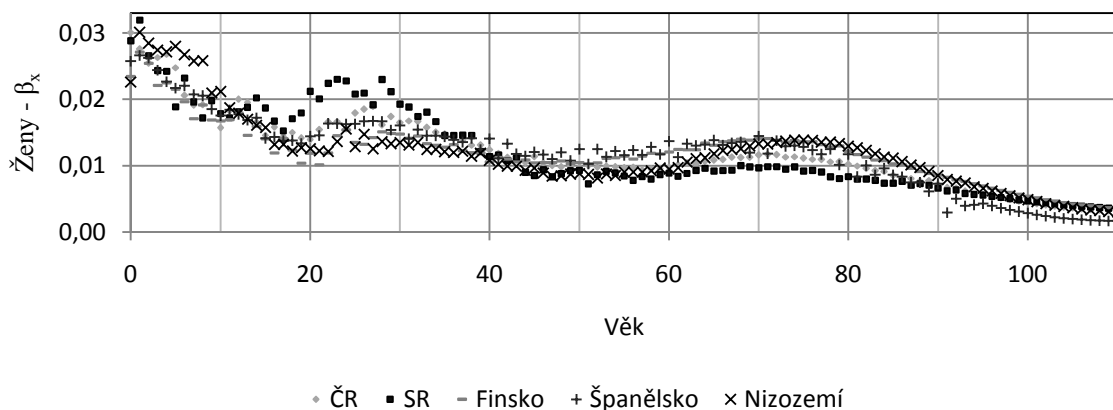
Parametr  $\beta_x$  představuje vliv jednotlivých věků na změnu specifické míry úmrtnosti. U všech analyzovaných států má jeho vývoj převážně klesající charakter. Hodnota parametru  $\beta_x$  se s rostoucím  $x$  blíží k 0. Hodnoty tohoto parametru u všech analyzovaných zemí jsou kladné s výjimkou Slovenska, kdy u mužů pro věky 48-66 let jsou tyto hodnoty záporné. Pro ženy jsou všechny hodnoty tohoto parametru kladné.

Obrázek 5: Odhad parametru  $\beta_x$  pro muže



Zdroj: vlastní zpracování na základě vlastních výpočtů

Obrázek 6: Odhad parametru  $\beta_x$  pro ženy



Zdroj: vlastní zpracování na základě vlastních výpočtů

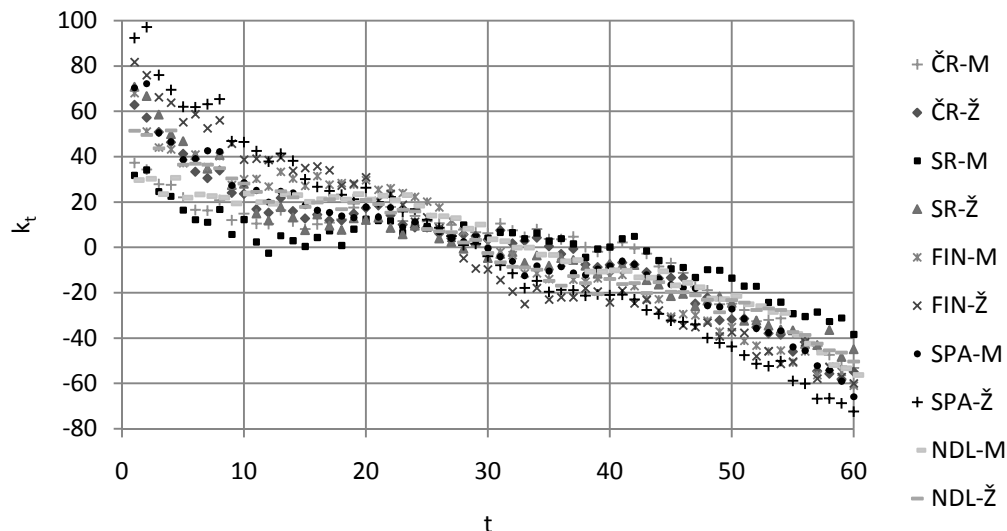
Na obrázku 7 jsou zobrazeny vypočítané hodnoty  $k_t$  pro muže i ženy ve všech analyzovaných státech. Aby bylo možné odhadnout hodnoty  $m_{x,t}$  pro budoucí roky a na základě toho napočítat hodnoty  $e_0$ , což je cíl tohoto příspěvku, je nutné predikovat hodnoty  $k_t$  pro  $t > t_n$ . Pro získání této predikce byly využity ARIMA modely stejně jako v [4]. Konkrétně po analýze autokorelací funkce a parciální autokorelací funkce byl jako nejvhodnější model identifikován model ARIMA(1,0,0). Tento model předpokládá mezi hodnotami  $k_t$  a  $k_{t-1}$  vztah popsáný rovnicí (7):

$$k_t = \gamma \cdot k_{t-1} \quad (7)$$

Před samotným výpočtem byly nejdříve hodnoty  $k_t$  očištěny o lineární trend, tedy od každé hodnoty byla odečtena hodnota lineární regresní funkce ve tvaru  $y = a + b \cdot t$  pro příslušné  $t$ . Odhady parametrů  $a$ ,  $b$  využitých lineárních regresních funkcí jsou uvedeny

v tabulce 2. Následně byly pomocí modelu ARIMA(1,0,0) predikovány očištěné hodnoty  $k_t$  pro  $t = 61, \dots, 80$ , což odpovídá predikci pro roky 2010 až 2029. Na závěr byl k takto získaným hodnotám opět přičten výše popsáný lineární trend. V tabulce číslo 3 jsou pak ještě pro doplnění uvedeny hodnoty parametru  $\gamma$  ze vztahu (7).

Obrázek 7: Odhad parametru  $k_t$  pro muže a ženy



Zdroj: vlastní zpracování na základě vlastních výpočtů

Tabulka 2: Odhady parametrů lineárních regresních funkcí  $y = a + b \cdot t$

	muži					ženy				
	ČR	SR	Finsko	Španělsko	Nizozemí	ČR	SR	Finsko	Španělsko	Nizozemí
$a$	34,93	23,7	56,95	51,49	39,92	47,47	46,32	67,23	74,89	46,27
$b$	-1,145	-0,777	-1,867	-1,688	-1,309	-1,556	-1,519	-2,204	-2,456	-1,517

Zdroj: vlastní zpracování na základě vlastních výpočtů

Tabulka 3: Hodnoty parametru  $\gamma$

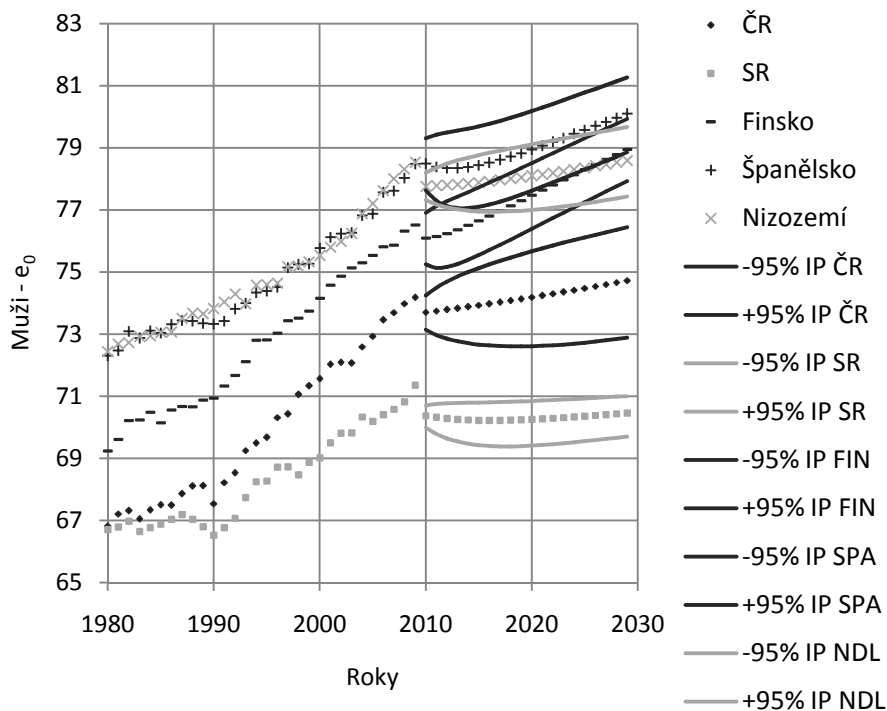
	muži					ženy				
	ČR	SR	Finsko	Španělsko	Nizozemí	ČR	SR	Finsko	Španělsko	Nizozemí
$\gamma$	0,9664	0,8475	0,7180	0,7698	0,9359	0,8234	0,7334	0,6663	0,6955	0,6348

Zdroj: vlastní zpracování na základě vlastních výpočtů

Lee-Carterův model je využíván k modelování a také predikování míry úmrtnosti. Následně lze tyto hodnoty využít pro modelování např. střední délky života. Střední délka života je jedním z měřítek, kterým se hodnotí vyspělost dané společnosti. Jak již bylo uvedeno v úvodní části, vyspělé země jsou v pozici, kdy musí řešit otázky, související se stárnutím populace a s prodlužující se délkou života. Pro řešení této problematiky, která má svá specifika související např. se zvýšenými náklady na zdravotní a sociální péči či důchodové zabezpečení, je třeba mít relevantní podklady. Je nutné sledovat nejenom historický vývoj, ale je potřeba mít k dispozici predikce dalšího vývoje.

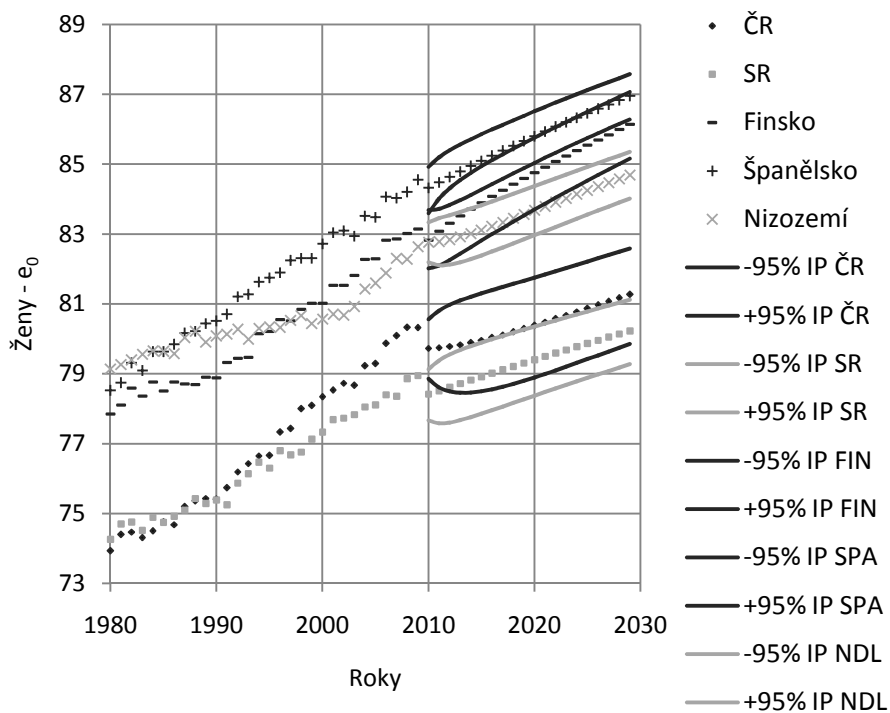
Na obrázcích 8 a 9 jsou zobrazeny vývoje střední délky života pro muže a ženy pro analyzované státy. Příslušný model pracoval se vstupními daty z let 1950-2009. Pro přehlednost znázornění byla na obou obrázcích zobrazena pouze data od roku 1980. Hodnoty pro roky 2010-2029 byly predikovány pomocí Lee-Carterova modelu.

Obrázek 8: Střední délka života při narození pro muže



Zdroj: vlastní zpracování na základě vlastních výpočtů

Obrázek 9: Střední délka života při narození pro ženy



Zdroj: vlastní zpracování na základě vlastních výpočtů

Jak je patrné z obrázků 8 a 9, střední délka života si zachovává rostoucí tendenci jak pro muže, tak pro ženy. Tento vývoj nebyl po celé analyzované období totožný. Po roce 1990 je zaznamenán poměrně strmý nárůst. Pro predikované hodnoty střední délky života byla použita data od roku 1950, kdy se střední délka života nezvyšovala tak rychle. Díky tomuto



vývoji je možné sledovat, že přechod mezi reálnými a predikovanými hodnotami střední délky života od roku 2010 není tak plynulý. Největší „skok“ lze vyčíst u vývoje střední délky života pro Slovensko, pak pro ČR, naopak nejmenší pro Španělsko a Nizozemí.

Za pozornost stojí určitě i sklon růstu predikovaných hodnot. Zatímco u žen je tento sklon téměř totožný pro všechny analyzované země, u mužů tomu tak není. Z obrázku 8 je patrné, že pro Slovensko je predikován téměř konstantní vývoj, naopak největší nárůst střední délky života je predikován pro Finsko.

Vzhledem k již zveřejněným datům střední délky života pro roky 2010 a 2011, lze tyto skutečné hodnoty porovnat s hodnotami námi predikovanými. Hodnoty střední délky života při narození pro roky 2010 a 2011 jsou uvedeny v tabulkách 4 a 5 spolu s hodnotami predikovanými pro tyto roky a s krajními body 95% predikčních intervalů.

Tabulka 4: Porovnání střední délky života při narození pro muže

	2010				2011			
	realita	predikce	-95% IP	+95% IP	realita	predikce	-95% IP	+95% IP
ČR	74,37	73,70	73,15	74,25	73,69	73,74	72,97	74,49
SR	71,70	70,37	69,99	70,70	71,92	70,32	69,78	70,75
Finsko	76,90	76,09	75,25	76,91	75,79	76,14	75,13	77,12
Španělsko	79,10	78,49	77,63	79,31	78,16	78,39	77,29	79,42
Nizozemí	78,90	77,76	77,32	78,19	77,06	77,78	77,17	78,36

Zdroj: vlastní zpracování na základě [3], [8] a vlastních výpočtů

Z tabulky 4 pro muže lze vyčíst, že pro Finsko a Španělsko reálná hodnota střední délky života padla do 95% predikčního intervalu pro oba roky 2010 a 2011. Pro ČR a SR jsou reálné hodnoty blízko horního krajního bodu predikčního intervalu. Pokud by se v tomto případě nevycházelo z historického vývoje střední délky života od roku 1950, ale z kratšího intervalu, reálné hodnoty střední délky života by do predikčního intervalu patřily. Totéž platí pro případ, že bychom pracovali v 99% predikčním intervalem.

Tabulka 5: Porovnání střední délky života při narození pro ženy

	2010				2011			
	realita	predikce	-95% IP	+95% IP	realita	predikce	-95% IP	+95% IP
ČR	80,60	79,72	78,86	80,55	80,74	79,74	78,61	80,81
SR	79,30	78,42	77,66	79,13	79,93	78,52	77,58	79,38
Finsko	83,50	82,82	82,02	83,59	83,07	82,10	84,01	83,47
Španělsko	85,30	84,32	83,69	84,92	84,37	84,48	83,72	85,20
Nizozemí	83,00	82,77	82,19	83,33	82,44	82,79	82,10	83,45

Zdroj: vlastní zpracování na základě [3], [8] a vlastních výpočtů

Z tabulky 5 pro ženy lze vyčíst, že pro Českou republiku, Slovensko a Španělsko reálná hodnota střední délky života za rok 2010 padla blízko horního okraje 95% predikčního intervalu. Pro Finsko a Nizozemí padly reálné hodnoty do predikčního intervalu. Pro rok 2011 reálné hodnoty padly do predikčního intervalu pro Českou republiku, Španělsko a Nizozemí.

Jak již bylo uvedeno, predikce vývoje střední délky života má pro všechny analyzované země jak pro muže, tak pro ženy rostoucí charakter (vyjma Slovenska, kde pro muže je vývoj predikce téměř konstantní). Při pozorném čtení tabulky 4 a 5 si ale lze všimnout, že pro reálná data pro roky 2010 a 2011 platí zvýšení střední délky života mezi těmito lety pouze pro Českou republiku a Slovensko, a to jak pro muže, tak pro ženy. U zbývajících analyzovaných států došlo, jak pro muže, tak pro ženy, ke snížení střední délky života mezi roky 2010 a 2011.

## 4. Závěr

Jedním z charakteristických rysů většiny evropských zemí je stárnutí populace. Tato oblast s sebou přináší jistá specifika týkající se všech ekonomických oblastí hospodářství každé země. Při řešení tohoto problému je důležité analyzovat minulý vývoj, ale neméně důležité je analyzovat vývoj budoucí. K těmto analýzám je potřebné mít dostatečné kvantitativní podklady, přičemž modely úmrtnosti mohou být jedním z nich.

V tomto příspěvku byl pro vybrané evropské země, na základě historických dat z období 1950-2009, predikován další vývoj střední délky života při narození na roky 2010-2029. K tomuto byl využit Lee-Carterův model. Dále k predikovaným hodnotám byl vypočítán také 95% interval spolehlivosti. Pro data z 2010 a 2011 mohly být hodnoty reálné porovnány s hodnotami predikovanými.

Střední délka života je jedním z měřítek pro hodnocení vyspělosti dané země. Její prodloužování je možné chápat jako výsadu vyspělých společností. Přesto i s touto výhodou jsou spojeny specifické problémy např. v oblasti důchodové, sociální, zdravotní, a dalších, které je potřeba řešit. Právě modely úmrtnosti jsou jedním z nástrojů, které je možné využít.

## References

- [1] Brouhns, N., Denuit, M., Vermunt, J. K., *A Poisson Log- Bilinear Regression Approach to the Construction of Protect Life Tables*, Insurance: Mathematics and Economics 31, 2002, 373-393.
- [2] Cipra, T. 2008. *Finanční ekonometrie*. 1. vydání. Praha: Ekopress, 538 s.
- [3] Český statistický úřad. Úmrtnostní tabulky 2010, 2011. [cit. 10. 08. 2012] Dostupné na WWW: <<http://www.czso.cz>>.
- [4] Haberman, S., Russolillo, M. *Lee-Carter mortality forecasting: application to the Italian population*. City University – Actuarial Research Paper No. 167.
- [5] *Human Mortality Database*. University of California, Berkeley (USA), Max Planck Institute for Demographic Research. [cit. 20. 06. 2012] Dostupné na WWW: <<http://www.mortality.org>>.
- [6] Lee, R. D., Carter, L. *Modelling and forecasting US mortality*, Journal of the American Statistical Association, vol. 87(419), 1992, 659-671.
- [7] Lundström, H., Qvist, J. *Mortality Forecasting and Trend Shifts: an Application of the Lee-Carter Model to Swedish Mortality Data*, International Statistical Review 72,1, 2002, 37-50.
- [8] *NationMaster*. Life Expectancy At Birth. [cit. 22. 08. 2012] Dostupné na WWW: <<http://www.nationmaster.com>>.
- [9] Sekerka, B., Jindrová, P. 2005. *Finanční a pojistná matematika*. 1. vydání. Pardubice: Univerzita Pardubice.