Dynamic portfolio selection based on the event tree

Výber dynamického portfólia založený na teórii rozhodovacích stromov

Ivan Brezina, Miroslava Dolinajcová [1]

Abstract

In this paper we decided to describe the optimization of dynamic portfolio strategies based on the event tree. In this paper we show the theoretical ground of model. The concrete model is shown in last section. This paper can be used like background for future study of this problem.

Key words

dynamic portfolio, event tree, asset

JEL Classification: C61

1. Úvod

V tomto príspevku sa venujeme stratégiám výberu dynamického portfólia založeného na teórii rozhodovacích stromov. Vybraný model je založený na optimalizácii skutočností a uspokojuje logické podmienky. Zmena portfólia je povolená len ako dodatočná nová informácia a rozhodnutia o zmene portfólia nezávisia od investorovho inštinktu, ale sú založené na exaktných matematických rozhodnutiach.

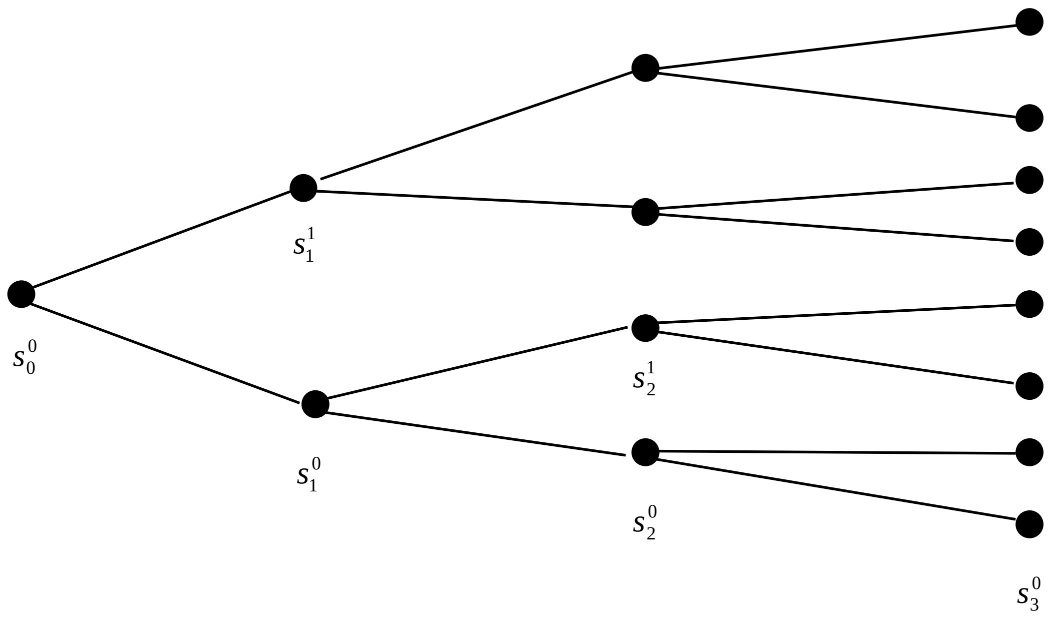
2. Základné koncepty stochastického programovania

Keďže model, ktorý je v tomto príspevku spomínaný je založený na základe rozhodovacieho stromu, je dobré si povedať, že je potrebné sledovať denný vývoj na trhu, najmä parametre ako cena, úrokové sadzby, ktoré najviac ovplyvňujú stav ekonomiky. Je dôležité tiež odhadnúť prípadné fluktuácie v úrokových sadzbách, cenách, či cashflow, ktoré môžu nastať v nasledujúcej perióde oproti súčasnému stavu. Táto informácia však musí byť náležite ohodnotená a následne je zahrnutá do transakcií predaja a kúpy cenných papierov a krátkodobého poskytovania, či prijímania pôžičiek. V nasledujúcej perióde tak získame ďalšie portfólio, ktoré nám slúži ako východiskový bod do nasledujúcej periódy, pričom sa stále opierame i o obe predošlé možnosti, že transakcia bola, či nebola vykonaná.

Rozhodnutia je potrebné urobiť vždy počas každej novej periódy. Takže rozhodnutia v konkrétnej perióde sú závislé od všetkých predošlých možných rozhodnutí, ktoré už boli vykonané. Krátka ilustrácia daného problému je zobrazená na obrázku 1.1.

[1] Ing. Ivan Brezina, brezina.ivan@yahoo.com, Ing. Miroslava Dolinajcová, mdolinajcova@gmail.com

Obrázok .11: Ukážka rozhodovacieho stromu pri dynamickej optimalizácii portfólia

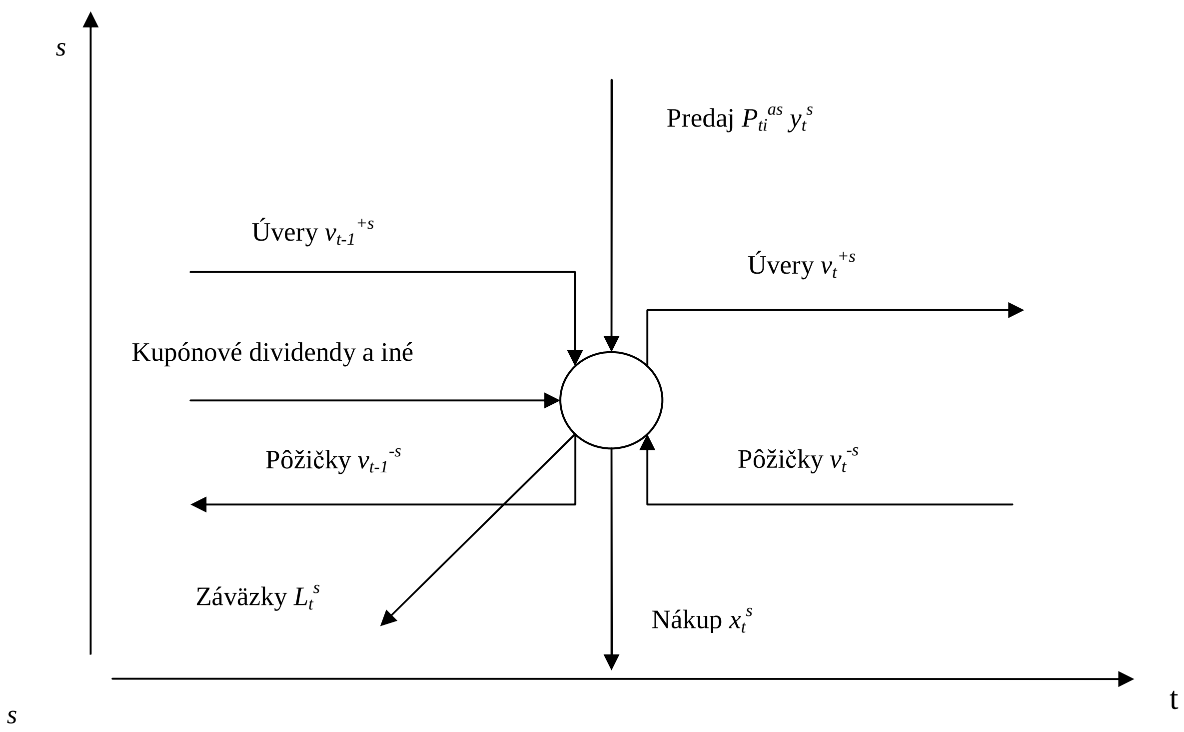


3. Formulácia modelu

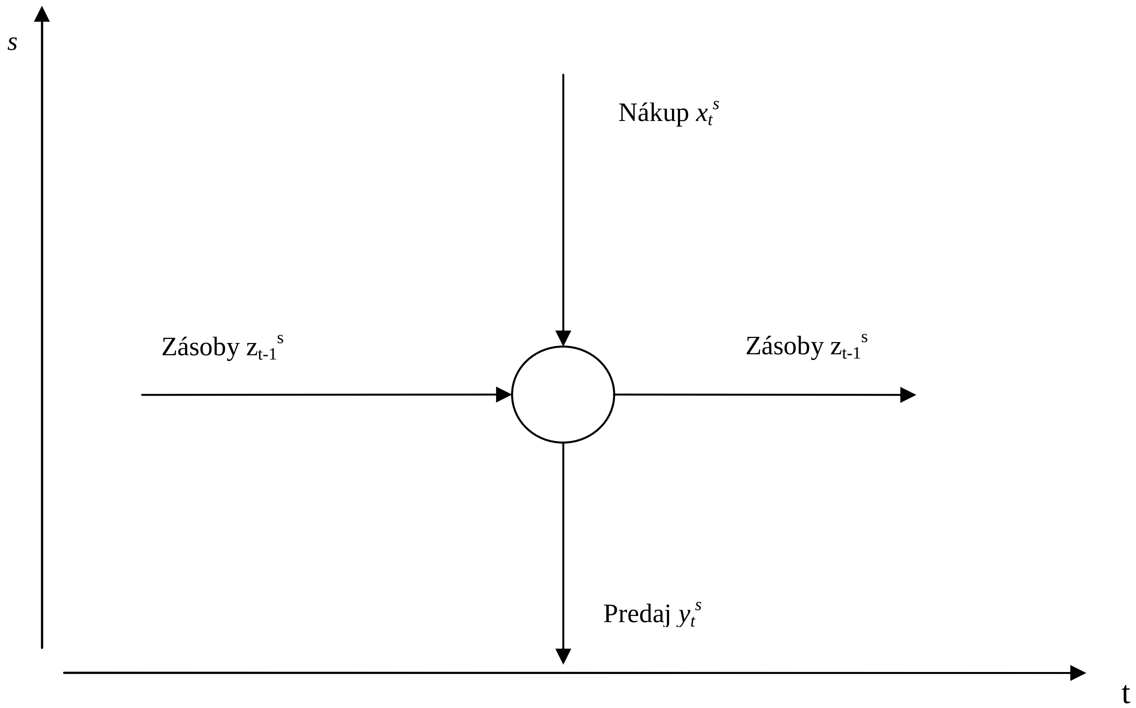
Keďže v tomto príspevku spomínaný model je založený na stochastickosti prechodov do nasledujúcich stavov, existujú dve základné obmedzenia, ktorými sú rovnováha cashflow bezrizikového finančného majetku a rovnováha zásob aktív v danom období pre každú kategóriu finančného majetku.

Obrázok 2.1 a obrázok 2.2 zobrazujú správanie sa cashflow a zmenu zloženia aktív v portfóliu v každom období. Všeobecne vravíme, že investícia pozostáva z *t* periód a *s* stavov.

Obrázok 2.1: Rovnováha cashflow v perióde t a stave



Obrázok 2.2: Rovnováha zásob aktív majetku v perióde t a stave s



Následne si formulujeme časti modelu pre $t=0$ a pre nasledujúce dni predaja v intervale $0<t<T$.

2.1 Podmienky prvotného rozhodnutia

Pri prvotnom rozhodovaní sa v $t=0$ sú všetky ceny s určitosťou známe, alebo poznáme zloženie portfólia. Pre každý cenný papier alebo triedu aktív $i \in U$ portfólia existuje ohraničenie pre rovnováhu zásob (2.1.1):

$$z_{0i}^0 = b_{0i} + x_{0i}^0 - y_{0i}^0 \tag{2.1.1}$$

kde:
$b_0 = (b_{01}, \dots, b_{0n})$ - počiatočný stav zásob,
Ďalšie premenné a vzťahy medzi nimi sú definované na obrázku 2.2
Rovnica rovnováhy cashflow zahŕňa pôvodné bezrizikové aktíva ako i likvidné časti existujúceho portfólia, rovnako i sumu investovanú do nových cenných papierov a platbu záväzkov, plus sumu investovanú do bezrizikových aktív.

$$\sum_{i=1}^{n} p_{0i}^{b0} y_{0i}^0 + v_0 + v_0^{-0} = \sum_{i=1}^{n} p_{0i}^{a0}\, x_{0i}^0 + v_0^{+0} + L_0^0 \tag{2.1.2}$$

Premenné zo vzťahu (2.1.2) sú definované v obrázku 2.2.

2.2 Podmienky ďalších rozhodnutí

Tieto podmienky sa týkajú ďalších rozhodnutí v $t=1,2,\dots,T$ a sú podmienkami v stave ekonomiky $s \in \sum t$. Na základe toho vieme, že máme v každej perióde t rovnaký súbor podmienok pre každý z nastávajúcich stavov s. Tieto rozhodnutia sú však značne ovplyvnené predošlými investičnými rozhodnutiami v predchádzajúcom čase t-1 a stave s^-.

Rovnica rovnováhy zásob aktív teda obsahuje sumu cenných papierov, ktoré boli predané, ako i sumu cenných papierov, ktoré ostali zahrnuté v portfóliu ako i celkovú výšku nominálnej hodnoty, ktorá je prenesená z predchádzajúceho obdobia *t-1* a sumu nákupu v súčasnom období. Pritom platí podmienka (2.2.1) pre každý cenný papier $i \in U$, ako i pre každý stav ekonomiky $s \in \sum t$.

$$z_{ti}^{s} = \alpha_{(t-1)i}^{s} z_{(t-1)i}^{s^-} + x_{ti}^{s} - y_{ti}^{s} \tag{2.2.1}$$

kde:
α- faktor amortizácie,
ostatné premenné zo obrázku 2.2.

Rovnováha cashflow vyžaduje aby suma investícií do nákupu nových cenných papierov a bezrizikových aktív bola rovná príjmu generovaného existujúcim portfóliom počas trvania celej periódy plus hotovosti generovanej predajom a hotovosti preinvestovanej v predošlej periódе, teda v predchádzajúcom stave s^-, a zároveň menšia než vyplatené záväzky, čo je zobrazené na obrázku 2.1. Existuje teda jedno ohraničenie pre každý stav ekonomiky $s \in \sum t$.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{(t-1)i}^{s} \, z_{(t-1)i}^{s^-} + \sum_{i=1}^{n} P_{ti}^{bs} y_{ti}^{s} + \left(1 + r_{f(t-1)}^{s}\right) v_{t-1}^{+s^-} = L_t^s + \sum_{i=1}^{n} P_{ti}^{as} x_{ti}^{s} + v_t^{+s} \tag{2.2.2}$$

Toto ohraničenie predpokladá investície do bezrizikových aktív v predošlej časovej periódе a predošlom stave- premenná $v_{t-1}^{+s^-}$ ale nezahŕňa pôžičky. Avšak pôžičky môžu byť zahrnuté v tejto rovnici prostredníctvom premennej v_t^{-s}. Pôžičky prispievajú k zvýšeniu cashflow, čo je popísané v ľavej strane rovnice (2.2.3), ale pôžičky z predchádzajúcej periódy musia byť spätne vyplatené s prislúchajúcimi úrokmi za dané obdobie. To zníži hodnotu cashflow, čo popisuje pravá strana rovnice (2.2.3). Rovnováhu cashflow môžeme teda popísať rovnicou pomocou pôžičiek a opätovných investícií v stave ekonomiky $s \in \sum t$, čo zapíšeme nasledovne:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{(t-1)i}^{s} \, z_{(t-1)i}^{s^-} + \sum_{i=1}^{n} P_{ti}^{bs} y_{ti}^{s} + \left(1 + r_{f(t-1)}^{s}\right) v_{t-1}^{+s^-} + v_t^{-s} \\ = L_t^s + \sum_{i=1}^{n} P_{ti}^{as} x_{ti}^{s} + v_t^{+s} + \left(1 + r_{f(t-1)}^{s} + \delta\right) v_{t-1}^{s^-} \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

kde: δ- rozptyl medzi mierou pôžičky a mierou poskytnutej pôžičky.

2.3 Záverečné podmienky

Na konci plánovaného obdobia investície vyhodnocujeme bohatstvo W_T^s získané držbou portfólia. To závisí od zloženia portfólia z rozličných skupín aktív a pomer v akom boli počas doby investície, pričom berieme ohľad na hotovosť a stav v ekonomike. Toto je dané:

$$W_T^s = v_T^{+s} + \sum_{i=1}^{n} P_{Ti}^{bs} z_{ti}^{s} \tag{2.3.1}$$

2.4 Účelová funkcia

V príslušnej stratégii dynamického portfólia je dôležité zaviesť účelovú funkciu zohľadňujúcu averziu k riziku. To dosiahneme použitím funkcie užitočnosti bohatstva. Cieľom optimalizácie modelu portfólia je maximalizácia funkcie užitočnosti bohatstva.

$$Max \sum_{s \in T} p^s \mathcal{U}(W_T^s)$$

(2.4.1)

kde:
p^s- je pravdepodobnosť prislúchajúca stavu s v$\sum T$,
W_s^t- označuje bohatstvo dané rovnicou (2.3.1),
$\mathcal{U}$- funkcia užitočnosti.

Celkový tvar modelu pre stratégiu optimalizácie dynamického portfólia môžeme zapísať nasledovne:

$$Max \sum_{s \in T} p^s \mathcal{U}(W_T^s)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{0i}^{b0} y_{0i}^0 + v_0 + v_0^{-0} = \sum_{i=1}^{n} p_{0i}^{a0} x_{0i}^0 + v_0^{+0} + L_0^0$$

$$z_{0i}^0 = b_{0i} + x_{0i}^0 - y_{0i}^0$$

pre všetky $i \in U$

$$z_{ti}^s = \alpha_{(t-1)i}^s z_{(t-1)i}^{s^-} + x_{ti}^s - y_{ti}^s$$

pre všetky $t \in T$, $s \in \sum t$, $i \in U$,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{(t-1)i}^s z_{(t-1)i}^{s^-} + \sum_{i=1}^{n} P_{ti}^{bs} y_{ti}^s + \left(1 + r_{f(t-1)}^s\right) v_{t-1}^{+s^-} + v_t^{-s}$$

$$= L_t^s + \sum_{i=1}^{n} P_{ti}^{as} x_{ti}^s + v_t^{+s} + \left(1 + r_{f(t-1)}^s + \delta\right) v_{t-1}^{s^-}$$

pre všetky $t \in T/\{0\}$, $s \in \sum t$, $i \in U$

$$W_T^s = v_T^{+s} + \sum_{i=1}^{n} P_{Ti}^{bs} z_{ti}^s$$

Účelová funkcia, ktorú sme zvolili v tomto modeli nie je jedinou možnosťou, je možná i jej obmena v závislosti od konkrétneho cieľa pri investovaní.

4. Záver

Príspevok sa venuje stratégiám výberu dynamického portfólia založeného na teórii rozhodovacích stromov, pričom popisuje problematiku od základného problému, cez použitie rozhodovacích stromov na daný typ úlohy, až po formuláciu konkrétneho modelu. Tento príspevok slúži ako teoretický základ pre ďalšie skúmanie a približuje problematiku, ktorá je pri súčasnom rozkolísanom stave trhov nanajvýš aktuálna a mohla by byť alternatívou k súčasnosti používaným metódam výberu portfólia.

Zoznam literatúry

[1] Heath, D. C. and P. L. Jackson, and A. Morton, 1992. *Bend pricing and the term structure of interest rates A new methodology for contingent claim valuation*. Econometrica 60

[2] Jensen, M. C., 1969. *Risk, the pricing of capital assets and the evaluation of investment portfolios*. Journal of Business 42

[3] Lam, J., 1999. *Integrated risk management, In Derivate credit risk: Further advances in measurement and management*. London: Risk Books, Financial Engeneering Ltd.

[4] Stavros A. Zenios., 2007. *Practical Financial Optimization*: Decision Making for Financial Engineers. Wiley, John & Sons, Incorporated