

VaR – analýza citlivosti, korekce

František Vávra¹, Pavel Nový²

Abstrakt

Práce se zabývá rozbory citlivosti některých postupů, zahrnutých pod zkratkou VaR. Analyzuje možný vliv vstupních neurčitostí a neurčitostí v určení pravděpodobnostního modelu.

Klíčová slova

Value at risk, riziko, citlivost, neurčitost, korekce pravděpodobnostních modelů.

1 Motivace a pojmy

Metodikami souhrnně nazývanými zkratkou VaR dostala oblast hodnocení rizik efektivní prostředek. Jako u všech postupů, které přinesly dané oblasti podnětný impuls k dalšímu rozvoji, objevují se zde některé nekritické přístupy a aplikace. Naším cílem je na některé upozornit. Podstatou VaR je vzájemné přiřazení kvantilu a hodnoty realizující tento kvantil. Existují různé formalizace.

Jednou z možných je [2]:

$$VaR_{\alpha} = \inf\{x \in R_1 : P(X > x) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{x \in R_1 : F_X(x) \geq \alpha\}, \quad (1)$$

kde:

R_1 je reálná osa, množina reálných čísel,

α je hladina významnosti, přijatelná pravděpodobnost překročení určené hladiny VaR_{α} ,

$P(X > x)$ je pravděpodobnost toho, že náhodná proměnná X , měřící riziko, překročí hodnotu x ,

$F_X(x)$ je distribuční funkce náhodné proměnné X v bodě x .

Pro jednoduchost a přehlednost se omezíme na klasické kvantilové vyjádření. Dále na „spojité“ náhodné proměnné s ryze rostoucími a spojitými distribučními funkcemi a s existující hustotou. Také se omezíme na jednorozměrné náhodné proměnné měřící riziko. Analyzovat budeme statické úlohy. Používaný formalismus proto bude:

$$F_X(x_{\alpha}) = \alpha \quad \text{nebo} \quad F_X(x(\alpha)) = \alpha. \quad (2)$$

Z této formulace lze ostatní úlohy za uvedených předpokladů snadno odvodit.

¹ Doc. Ing. František VÁVRA, CSc., Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň. vavra@kma.zcu.cz.

² Ing. Pavel NOVÝ, Ph.D., Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra informatiky a výpočetní techniky, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň. novyp@kiv.zcu.cz.

2 Předpoklad spolehlivě známé distribuční funkce

2.1 Základní přístupy

V užívaných metodikách existují dva základní (elementární) přístupy [1]:

– VaR to Risk

vstupem je hodnota náhodné proměnné měřící riziko, výstupem je hladina významnosti; řešíme tedy vztah $F_X(x) = \alpha$ vůči α , při daném x , $[x(\alpha)]$.

– Risk to VaR

vstupem je hladina významnosti, výstupem je jí odpovídající prahová hodnota náhodné proměnné měřící riziko; řešíme tedy vztah $F_X(x) = \alpha$ vůči x , při daném α , $[x(\alpha)]$.

2.2 Citlivost postupu VaR to Risk

Analýza citlivosti se obvykle zabývá řešením otázky, jak se změní výstup, když se vstup změní „málo“. V této konkrétní úloze to znamená:

$$\alpha(x + \Delta) = F_X(x + \Delta) \cong F_X(x) + f_X(x)\Delta = \alpha(x) + f_X(x)\Delta, \quad (3)$$

kde:

$f_X(x)$ je hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné měřící riziko.

V této elementární úloze je změna hladiny významnosti úměrná hodnotě hustoty v daném bodě. K vysvětlení efektu tohoto výsledku musíme zavést pojem definiční obor náhodné proměnné:

$$D_X = \{x : (x \in R_1) \wedge (0 < F_X(x) < 1)\}. \quad (4)$$

Protože s metodikou VaR obvykle pracujeme v „krajích“ definičního oboru, tj. tam, kde jsou odpovídající pravděpodobnosti (hladiny významnosti) „dost malé“ nebo naopak „dost velké“, je z pohledu citlivosti a pro tuto úlohu důležité zjistit, jak se v těchto krajích chová hustota. K tomu bude užitečné zavést pojem podstatný definiční obor.

Podstatným definičním oborem (ε -řezem) na hladině ε ; $\varepsilon > 0$ budeme rozumět množinu:

$$D_X(\varepsilon) = \left\{x : (x \in R_1) \wedge \left(F_X(x) > \varepsilon/2\right) \wedge \left(F_X(x) < 1 - \varepsilon/2\right)\right\}. \quad (5)$$

Je zřejmé, že $D_X(0) = D_X$. ε -řez je vlastně množina hodnot, mezi kterými se s dostatečně velkou pravděpodobností $1 - \varepsilon$ vyskytují hodnoty náhodné proměnné měřící riziko. ε -řezy by šlo zavést nesymetricky. Jsou úlohy, kdy je takové zavedení užitečné, ale v tomto textu o tento typ nepůjde.

Diskutovaný postup stanovení hladiny významnosti α nebude citlivý na volbu x , pokud bude hodnota hustoty $f_X(x)$ na množině $D_X \div D_X(\varepsilon)$ dostatečně malá pro malé ε . To je např. splněno pro normální-Gaussovo rozdělení a naopak není splněno pro „neposunuté“ exponenciální rozdělení v okolí nuly.

2.3 Citlivost postupu Risk to VaR

V této konkrétní úloze problém citlivosti znamená:

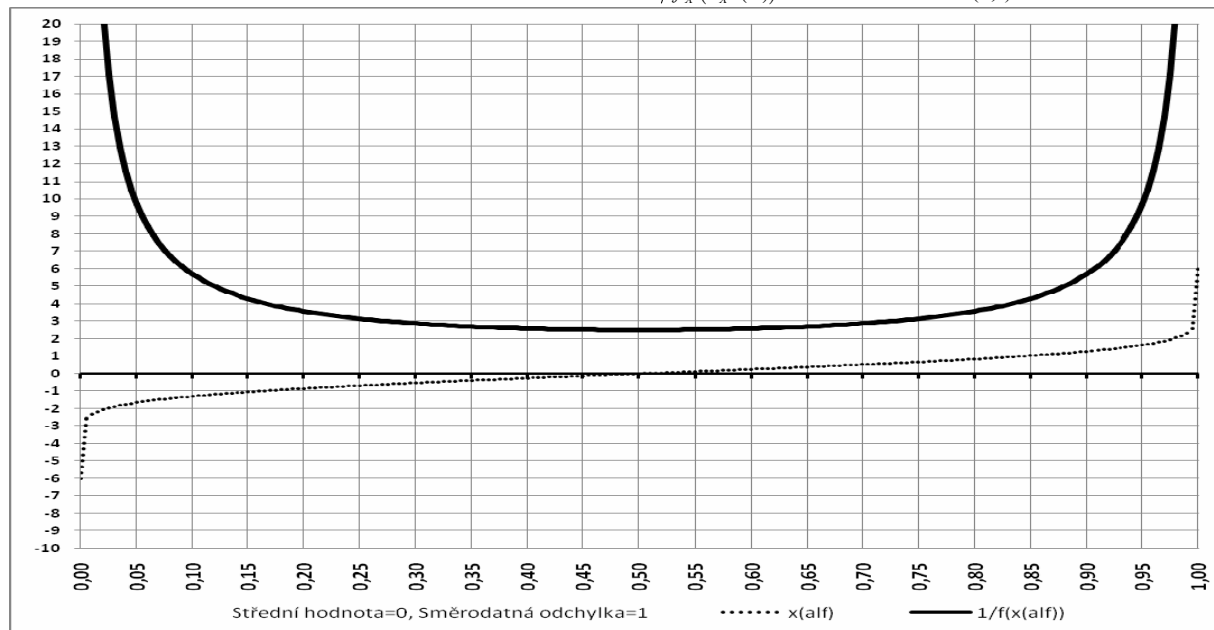
$$x(\alpha + \delta) = F_X^{-1}(\alpha + \delta) \cong F_X^{-1}(\alpha) + \frac{d}{d\alpha} F_X^{-1}(\alpha) \Big|_{\alpha} \delta = x(\alpha) + \frac{1}{f_X(F_X^{-1}(\alpha))} \delta, \quad (6)$$

kde:

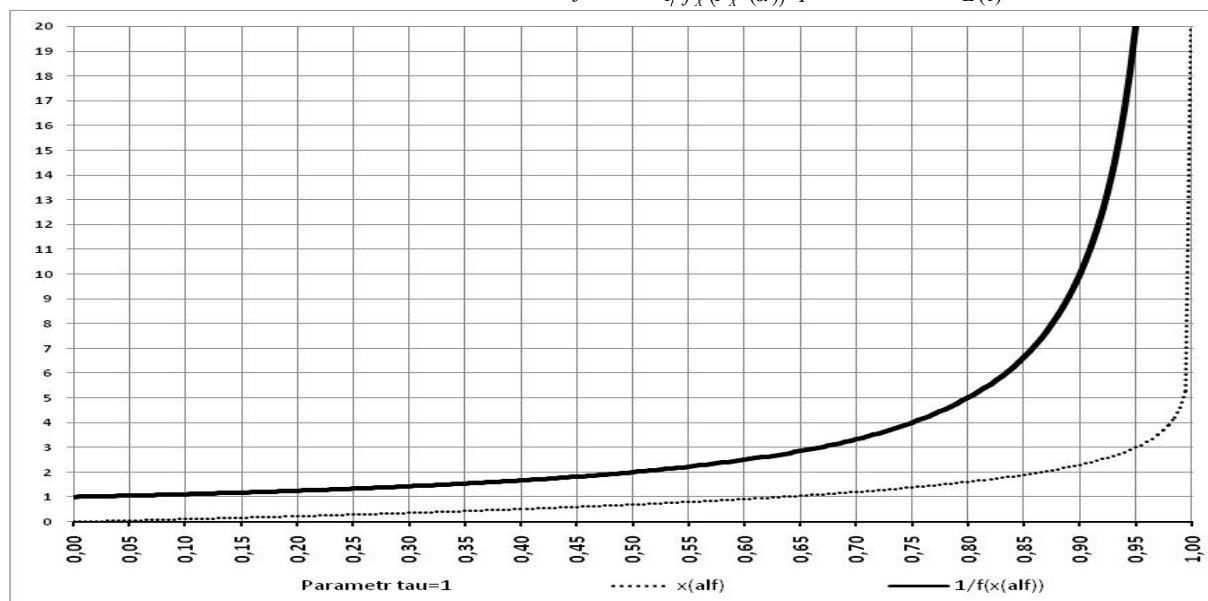
$F_X^{-1}(\alpha)$ je inverzní (kvantilová) funkce k funkci distribuční.

V této elementární úloze je změna hodnoty VaR úměrná součiniteli $1/f_X(F_X^{-1}(\alpha))$. To už bude činit v některých i zcela reálných úlohách problémy. To reprezentují následující obrázky, na kterých je zobrazen průběh tohoto součinitele pro normální a exponenciální rozdělení pravděpodobnosti.

Obrázek č. 1: Hodnota citlivostní funkce $1/f_x(F_x^{-1}(\alpha))$ pro rozdělení $N(0,1)$.



Obrázek č. 2: Hodnota citlivostní funkce $1/f_x(F_x^{-1}(\alpha))$ pro rozdělení $E(1)$.



Z obou obrázků je zřejmé, že v této úloze a u uvedených rozdělení je stanovení $x(\alpha)$ velice citlivé na volbu α .

3 Odhadovaný pravděpodobnostní popis

Předchozí případ, kdy je známý pravděpodobnostní popis, je spíše výjimkou než realitou. Ve skutečnosti je většina předpokládaných úloh svázána s některým typickým modelem (normální rozdělení, exponenciální rozdělení, ...). Ten však ne vždy dává i při dobré statistické parametrické inferenci přijatelné výsledky. Proto jsou nutné korekce. Zde prezentovaný případ vychází z prací [3] a [4].

Jedna z možností testu přijatelnosti zvoleného modelu je založena na triviálním tvrzení: Má-li náhodná proměnná ξ rozdělení s distribuční funkcí $F_\xi(x)$, pak má náhodná proměnná $\eta = F_\xi(\xi)$ rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,1)$.

Toto tvrzení pak může sloužit jako test shody zvoleného modelu s realitou. Testujeme shodu empirické distribuční funkce (EDF) náhodné proměnné η s modelovou distribuční funkcí rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0,1)$. Metodika takového testování je podložena [5], str. 422-429. Pokud test vede k přijetí hypotézy shody, nevzniká žádný problém. Situace zamítnutí bude nadále sledována. Reálný příklad je na obrázku č. 3.

Obrázek č. 3: Příklad empirické distribuční funkce transformovaných hodnot.
 Jedná se o logaritmus poměru současného a předchozího kurzu, modelová distribuční funkce je normální.
 Zdroj dat: <http://www.ecb.int/stats/exchange/eurofxref/html/index.en.html>,
 kurzy CZK za EUR 2.1.2003-10.7.2008.



Údaj	CZK za EUR - $\lg(k(t)/k(t-1))$	Transformace modelovou distribuční funkcí $N(\text{průměr}, \text{StD}^2)$
Minimum	-0,015	0,000
Průměr	0,000	0,504
Výběrový medián	0,000	0,518
Maximum	0,013	1,000
Odhad StD	0,003	0,273
Počet	1 415	1 415

Tabulka č. 1: Výběrové parametry k distribuční funkci na obrázku č. 3.

3.1 Distorzní korekce

Výše demonstrováný nedostatek zvoleného modelového popisu lze v některých případech korigovat pomocí pojmu distorze. Ta vychází z jednoduchého tvrzení: Je-li $F(x)$ libovolná distribuční funkce některé náhodné proměnné $F: S \rightarrow \langle 0,1 \rangle$, $S \subset R_1$ a $G(x)$ je distribuční funkce $G: \langle 0,1 \rangle \rightarrow \langle 0,1 \rangle$, pak složená funkce $G(F(x))$ je také distribuční funkcí $F \circ G: S \rightarrow \langle 0,1 \rangle$. $G(x)$ bývá nazývána korekční distribucí nebo distorzí. Pro detaily odkazujeme na naše práce [3] a [4]. V literatuře lze nalézt mnoho distorzí, použitelných pro různé situace, např.:

- $G(x) = x^a; a > 0$... mocninná distorze,
- $G(x) = \Phi(\Phi^{-1}(x) + \lambda); \lambda \in R_1; \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz; \Phi^{-1}(x)$... inverze mocninné distorze, tzv. Wangova distorze (Wangova transformace),
- $G(x) = (1 + \lambda)x - \lambda x^2; \lambda \in \langle -1,1 \rangle$... Giniho distorze (Giniho transformace),
- ...

- $G(x) = B(x; \alpha, \beta) = \frac{\int_0^x z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} dz}{B(\alpha, \beta)}; \alpha, \beta > 0$... Beta distorze.

V této práci bude pro korekce modelových popisů využita Beta distorze (Beta distribuce, Beta rozdělení), pro svou poměrně širokou flexibilitu.

3.2 Využití Beta distorze

Mějme náhodný výběr (x_1, x_2, \dots, x_n) z náhodné proměnné ξ . O něm budeme předpokládat, že se jednotlivá pozorování řídí distribuční funkcí $F_\xi(x)$.

- Náhodný výběr transformujeme modelovou distribuční funkcí $F_\xi(x)$, $y_i = F_\xi(x_i); i = 1, \dots, n$. Výběr (y_1, y_2, \dots, y_n) otestujeme na „rovnoměrnost“. Pokud lze přijmout hypotézu rovnoměrného rozdělení, pak je $F_\xi(x)$ přijatelným modelem pro další práci (např. VaR analýzu). Pokud ne, pokračujeme dalším krokem.

- Stanovíme základní statistické parametry: $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$. Z nich

„momentovou metodou“ odhadneme parametry Beta rozdělení $\alpha = \bar{y} \left(\frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{s^2} - 1 \right)$,

$$\beta = (1 - \bar{y}) \left(\frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{s^2} - 1 \right).$$

- Výběr (y_1, y_2, \dots, y_n) transformujeme $z_i = B(y_i; \alpha, \beta)$. Transformovaný otestujeme na rovnoměrnost.

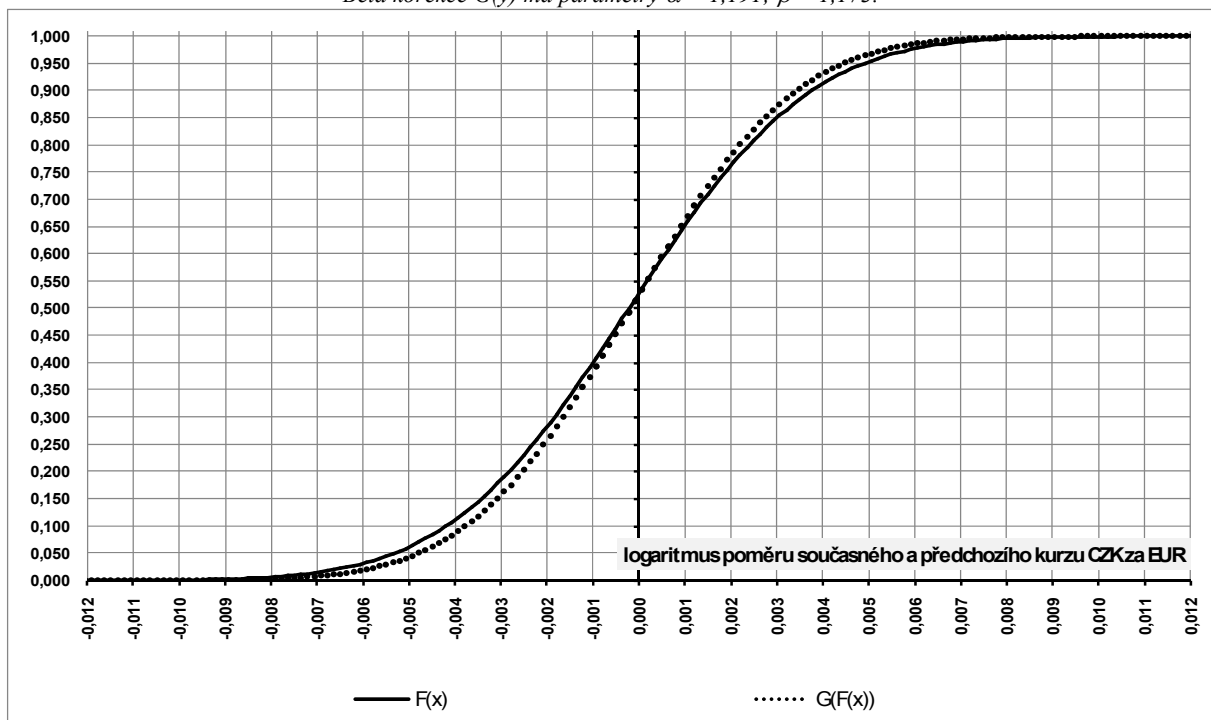
Na obrázku č. 4 je příklad, jak dopadne korekce beta distorzí.

Obrázek č. 4: Příklad změny distribuční funkce transformované náhodné proměnné po korekci beta-distorzí.
Jedná se o pokračování příkladu zobrazeného na obrázku č. 3.



Následuje obrázek kompletních distribučních funkcí nad původní osou.

Obrázek č. 5: Modelová a korigovaná distribuční funkce.
Navazuje na předchozí obrázek č. 4.
Modelová distribuční funkce je normální s parametry uvedenými v tabulce č. 1.
Beta korekce $G(y)$ má parametry $\alpha = 1,191$; $\beta = 1,173$.



3.3 Měření „ne-kvality“ modelů

Pojetí distorze lze použít i pro „měření kvality“ použitých modelů. Použijeme následující označení:

$F_e(x)$ je empirická distribuční funkce daného náhodného výběru,

$F_m(x)$ je modelová distribuční funkce dle zvoleného pravděpodobnostního modelu,

$G(y)$ je distorze popisující „odchýlení“ modelu a odhadnuté skutečnosti,

x_1, x_2, \dots, x_n je zpracovávaný náhodný výběr,

y_1, y_2, \dots, y_n je náhodný výběr transformovaný modelovou distribuční funkcí

$$y_i = F_m(x_i); i = 1, \dots, n.$$

Pro vztah mezi empirickou a modelovou distribuční funkcí můžeme předpokládat následující vztah:

$$F_e(x) = G(F_m(x)). \quad (7)$$

Vzhledem k uvedeným předpokladům existuje k modelové distribuční funkci její inverze $F_m^{-1}(y)$. Proto můžeme použít substituci $y = F_m(x) \Rightarrow x = F_m^{-1}(y)$. Jejím dosazením do vztahu (7) dostáváme vztah pro vyjádření distorze:

$$G(y) = F_e(F_m^{-1}(y)); y \in (0,1). \quad (8)$$

„Vzdáleností“ distorze od identity na $(0,1)$ můžeme pak poměřovat kvalitu či nekvalitu použitého modelu. Takové měření či test by měl být součástí každé VaR studie. Vztah (8) sám o sobě není dokonalý, jsou zapotřebí jeho statistické vlastnosti. Jejich rozbor, přes svou velkou zajímavost, však podstatně překračuje rozsah a určení této práce.

Literatura

- [1] VOJTÍŠKOVÁ, M.: *Models and methods for measuring the financial risk*. Disertační práce, ZČU – FAV Plzeň, Katedra informatiky a výpočetní techniky, Plzeň, 2007.
- [2] MORGAN, J. P. and REUTERS: *RiskMetricsTM – Technical Document*. Fourth Edition, 1996. New York. December 17, 1996.
- [3] VÁVRA, F., NOVÝ, P., MAŠKOVÁ, H., NETRVALOVÁ, A.: *Distortion of probability models*. 4th International Conference APLIMAT 2005, Slovak University of Technology, Bratislava, 2005.
- [4] VÁVRA, F., NOVÝ, P., NETRVALOVÁ, A., NEUMANOVÁ, M., VOKÁČOVÁ, K.: *Transformation and probability models*. 5th International Conference APLIMAT 2006, Slovak University of Technology, Bratislava, 2006.
- [5] RÉNYI, A.: *Teorie pravděpodobnosti*. ACADEMIA, Praha, 1972.

Summary

VaR – sensitivity analysis and correction

Some sensitivity analyses VaR methodology are presented. Uncertainty and probability model uncertainty are analyzed. Correction procedures and some way to measuring imperfection are proposed too.