Efektívnosť bonus-malus systému

Valéria Skřivánková , Jozef Fecenko [1]

Abstrakt

Efektívnosť slúži na posúdenie účinnosti riadenia rizika bonus – malus systému v neživotnom poistení a na vzájomné porovnanie kvality rôznych bonus – malus systémov, modelovaných pomocou Markovových reťazcov. V príspevku je uvedené najprv asymptotické kritérium pre homogénny a stabilizovaný bonus – malus systém, potom sa uvažuje neasymptotický a heterogénny prípad. Základný model, v ktorom sa predpokladá Poissonove rozdelenie počtu škôd s konštantnou intenzitou λ, je zovšeobecnený na prípad, kedy parameter λ sa považuje za náhodnú veličinu s gama rozdelením. Nakoniec je ukázané, že rozdelenie počtu škôd je v tomto prípade negatívne binomické.

Kľúčové slová

Bonus – malus systém, riadenie rizika, Markovove reťazce, efektívnosť v stabilizovaných a neregulárnych systémoch.

1 Úvod

Bonus – malus systém (BMS) je založený na poskytovaní rôznych zliav a prirážok a používa sa hlavne pri havarijnom poistení motorových vozidiel. *Bonus* je zmluvne zaručená zľava zo základného poistného za bezškodový priebeh. *Malus* je prirážka k základnému poistnému, určená podľa počtu (v niektorých krajinách aj podľa výšky) uplatnených poistných nárokov v minulosti. BMS môže použiť poisťovňa, ak sú splnené nasledujúce dva predpoklady:

P1) Všetkých poistencov možno zaradiť do konečného počtu *K* tarifných skupín (TS) tak, že poistné závisí iba od príslušnosti k danej TS.

P2) Tarifná skupina, v ktorej bude poistenec v danej perióde (roku) poistenia, je jednoznačne určená skupinou (triedou), v ktorej sa nachádzal v predchádzajúcej perióde a počtom škôd, ktoré v priebehu nej nahlásil (uplatnil).

Hlavným cieľom BMS je diferencovať výšku poistného podľa TS (spravodlivosť) a nabádať poistencov, aby nezaťažovali poisťovňu malými poistnými nárokmi (vytvárať „hlad po bonuse“). Z toho vyplýva, že riadenie rizika v BMS má dva protichodné aspekty:

1. *Riadenie rizika poisťovňou* má za cieľ maximalizovať zisk poisťovne a prilákať potenciálnych klientov. Spočíva v správnej tarifikácii poistného kmeňa a v určení optimálnej výšky základného poistného, od ktorej sa odvíja poistné vo všetkých tarifných skupinách. Tomuto problému sme sa venovali v príspevku [5].
2. *Riadenie rizika poistencom* sleduje minimalizáciu nákladov poistenca na poistenie a spočíva v hľadaní optimálnej stratégie nahlasovania poistných udalostí. Takáto optimálna stratégia bola prezentovaná v práci [1].

[1] Doc. RNDr. Valéria Skřivánková, CSc., Prírodovedecká fakulta Univerzity P.J.Šafárika v Košiciach, Jesenná 5, 041 54 Košice, SR, email: valeria.skrivankova@upjs.sk.
Doc. RNDr. Jozef Fecenko, CSc., Fakulta hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave, Dolnozemská cesta 1/b, 852 35 Bratislava, SR email: fecenko@euba.sk

V tomto príspevku sa sústredíme na posúdenie účinnosti riadenia rizika, presnejšie na posúdenie kvality fungovania BMS. Vo svete existuje veľa rôznych BMS, ktoré sa len ťažko dajú porovnať, pretože sa líšia počtom TS, pravidlami prechodu medzi nimi, aj poistným prislúchajúcim jednotlivým triedam. To, či je BMS správne nastavený, sa odzrkadlí na účinnosti jeho fungovania. Systém je vo všeobecnosti efektívny, ak relatívna zmena v intenzite výskytu škôd vedie k adekvátnej relatívnej zmene výšky poistného. V ďalšom sa budeme venovať asymptotickým aj neasymptotickým kritériam kvality BMS, modelovaných pomocou Markovových reťazcov.

2 Konštrukcia modelu bonus-malus systému

Bonus-malus systém, uvažovaný v úvodnej časti a spĺňajúci predpoklady (P1), (P2), je daný tromi prvkami:

1 Počiatočnou (vstupnou) tarifnou skupinou: $i_0 \in \{1, 2, ..., K\} = S$
2 Pravidlami prechodu medzi tarifnými skupinami
3 Poistným v jednotlivých tarifných skupinách: ci, i = 1,2, ..., K.

Za istých predpokladov sa dá takýto BMS modelovať pomocou Markovových reťazcov. Markovov proces je vo všeobecnosti náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$, jednoznačne určený zadaním stavového priestoru S, časového priestoru T, počiatočného rozdelenia stavov

$$p_j(0) = P(X_0 = j), \ j \in S \tag{1}$$

a podmienených pravdepodobností prechodov medzi jednotlivými stavmi

$$p_{i,j}(s,t) = P(X_t = j / X_s = i), \ \ i,j \in S, \ \ s,t \in T, \ \ 0 \leq s < t. \tag{2}$$

Predpoklady modelu:

- V systéme bonus-malus za stavy Markovovho procesu budeme považovať príslušnosť poistenca k jednotlivým tarifným skupinám, ktorých je vždy konečne veľa. Ide o Markovov proces s diskrétnymi stavmi (reťazec), presnejšie $S = \{1,2,...K\}$.
- K preradeniu do inej tarifnej skupiny môže dôjsť len na začiatku roka, teda jedná sa o Markovov reťazec s diskrétnym časom, $T = \{0, 1, 2, ...\}$, časová jednotka je 1 rok.
- Počiatočné rozdelenie stavov je dané jednotkovým vektorom $\overline{p}(0) = (0,0,...,1,...0)$ pričom hodnota 1 stojí na tom mieste j, do ktorej TS je nový klient zaradený.
- Podmienené rozdelenie prechodu sa určuje jednoznačne podľa pravidiel bonus-malus systému. Vo všeobecnosti bezškodový priebeh v minulom roku môže znamenať presun o jednu alebo aj viac tried k lepšiemu (zvyčajne k vyššiemu stavu). Nenulový počet nahlásených škôd naopak, spôsobuje presun smerom k horšiemu.

Ak uvažované pravdepodobnosti prechodu sú invariantné voči posunutiu v čase, teda ak pre ľubovoľné $n, k \in T$ je

$$p_{i,j}(n,n+k) = p_{i,j}(k), \quad \text{nezávisle na } n, \tag{3}$$

tak príslušný Markovov reťazec je *homogénny.* Navyše, uvažovaný reťazec je *nerozložiteľný* (každá tarifná skupina je dosiahnuteľná z ľubovoľnej inej) a *neperiodický* (existuje trieda, v ktorej poistenec môže zotrvať ľubovoľne dlho). Ak existujú limitné pravdepodobnosti prechodu nezávisle na počiatočnom stave i (*stacionárne rozdelenie*)

$$\lim p_{i,j}(n) = \pi_j, \quad \text{pre} \quad n \to \infty, \ \ i,j \in S, \tag{4}$$

tak modelovaný BMS je *stabilizovaný.* Z teórie náhodných procesov je známe (pozri napr.[4]), že stacionárne rozdelenie sa nájde ako jediné riešenie sústavy

$$\overline{\pi} = \overline{\pi}.\widetilde{P}\,, \quad \sum_{j \in S} \pi_j = 1\,, \tag{5}$$

kde $\overline{\pi} = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_K)$ je vektor stacionárnych rozdelení a $\widetilde{P} = (p_{i,j}),\ i,j = 1,\ 2,\ ...,\ K$ je matica pravdepodobností prechodu (za jednu periódu). Vzhľadom na to, že limitné pravdepodobnosti sú určené v závislosti na intenzite výskytu škôd λ, v stabilizovanom BMS možno určiť *priemerné poistné* jednotne pre všetky tarifné skupiny ako

$$\overline{C}(\lambda) = \sum_{j=1}^{K} \pi_j(\lambda) \cdot c_j \tag{6}$$

3 Efektívnosť v stabilizovanom BMS

Asymptotickým kritériom účinnosti riadenia rizika v stabilizovanom BMS je *efektívnosť,* daná ako podiel relatívnej zmeny priemerného poistného a relatívnej zmeny intenzity výskytu škôd, teda ako

$$\frac{\Delta\overline{C}(\lambda)}{\overline{C}(\lambda)} \Big/ \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

Pre praktický výpočet sa uvažujú príslušné elementárne zmeny pri $\Delta\lambda \to 0$, takže efektívnosť definujeme pomocou derivácie priemerného poistného podľa intenzity nasledovne

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\mathrm{d}\overline{C}(\lambda)}{\overline{C}(\lambda)} \Big/ \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\overline{C}(\lambda)} \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{C}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \quad . \tag{7}$$

BMS sa nazýva *dokonale efektívny*, ak uvedené relatívne zmeny sú rovnaké, teda zmena poistného presne kopíruje zmenu intenzity

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{C}}(\lambda)}{\overline{\mathrm{C}}(\lambda)} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \tag{8}$$

V tomto prípade je efektívnosť *ε(λ)* =1. Vo všeobecnosti reálne BMS nespĺňajú podmienku (8), ale väčšinou platí

$$0 < \varepsilon(\lambda) \le 1. \tag{9}$$

Na výpočet efektívnosti podľa vzťahu (7) potrebujeme deriváciu $\mathrm{d}\overline{C}(\lambda)/\mathrm{d}\lambda$. Dostaneme ju derivovaním vzťahu (6) ako

$$\frac{\mathrm{d}\overline{C}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_{j \in S} \frac{\mathrm{d}\pi_{\mathrm{j}}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \cdot c_j \ ,$$

pričom $\mathrm{d}\pi_j(\lambda)/\mathrm{d}\lambda$, $j = 1,2,...,K$, získame deriváciou vzťahu (5), teda riešením sústavy

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\pi}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\overline{\pi}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \cdot \widetilde{P}(\lambda) + \overline{\pi}(\lambda) \cdot \frac{\mathrm{d}\widetilde{P}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda},$$

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{\mathrm{d}\pi_j(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = 0.$$

Keďže pravú stranu vzťahu (7) môžeme získať aj postupnými úpravami podielu

$$\frac{\mathrm{d}\ln\overline{C}(\lambda)}{\mathrm{d}\ln\lambda}=\frac{\mathrm{d}\ln\overline{C}(\lambda)}{\mathrm{d}\overline{C}(\lambda)}\cdot\frac{\mathrm{d}\overline{C}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\ln\lambda}=\frac{1}{\overline{C}(\lambda)}\cdot\frac{\mathrm{d}\overline{C}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\bigg/\frac{\mathrm{d}\ln\lambda}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}\overline{C}(\lambda)}{\overline{C}(\lambda)}\bigg/\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda},$$

pre výpočet efektívnosti v stabilizovanom BMS dostávame vzťah ekvivalentný k (7) v tvare

$$\varepsilon(\lambda)=\frac{\mathrm{d}\ln\overline{C}(\lambda)}{\mathrm{d}\ln\lambda}\ . \tag{10}$$

Princíp BMS vyžaduje, aby rastúcim rizikom (tu prezentovaným intenzitou λ) rástlo aj priemerné poistné $\overline{C}(\lambda)$, teda $\ln\overline{C}(\lambda)$ bude monotónne rastúcou funkciou λ. Avšak priemerne poistné je zhora ohraničené hodnotou max c_i, teda aj hodnota $\ln\overline{C}(\lambda)$ konverguje pre $\lambda\to\infty$ k nejakej konečnej hodnote, a efektívnosť podľa (10) sa blíži k nule. Zrejme rovnica $\overline{C}(\lambda)=\lambda$ má aspoň jedno riešenie λ_0 , pre ktoré je $\overline{C}(\lambda_0)=\lambda_0$, a tak zintegrovaním vzťahu (10) dostaneme:

a) Pre $\lambda<\lambda_0$:

$$\int_\lambda^{\lambda_0}\varepsilon(\lambda)\mathrm{d}\ln\lambda=\int_\lambda^{\lambda_0}\mathrm{d}\ln\overline{C}(\lambda)=\ln\overline{C}(\lambda_0)-\ln\overline{C}(\lambda)=\ln\lambda_0-\ln\overline{C}(\lambda)\pm\ln\lambda=\int_\lambda^{\lambda_0}\mathrm{d}\ln\lambda+\ln\lambda-\ln\overline{C}(\lambda).$$

Odtiaľ

$$\ln\frac{\overline{C}(\lambda)}{\lambda}=\int_\lambda^{\lambda_0}(1-\varepsilon(\lambda))\mathrm{d}\ln\lambda,\quad\text{resp.}\ \ \overline{C}(\lambda)=\lambda\cdot\exp\left\{\int_\lambda^{\lambda_0}(1-\varepsilon(\lambda))\mathrm{d}\ln\lambda\right\}. \tag{11}$$

b) Pre $\lambda>\lambda_0$ analogicky dostávame:

$$\overline{C}(\lambda)=\lambda\cdot\exp\left\{-\int_{\lambda_0}^{\lambda}(1-\varepsilon(\lambda))\mathrm{d}\ln\lambda\right\}. \tag{12}$$

Ak je $\varepsilon(\lambda)<1$, potom hodnoty integrálov v (11) a (12) sú kladné a platí teda

$$\overline{C}(\lambda)<\lambda,\ \text{pre}\ \lambda>\lambda_0\quad\text{a}\quad\overline{C}(\lambda)>\lambda,\ \text{pre}\ \lambda<\lambda_0\,.$$

To znamená, že jedine v prípade, že $\lambda=\lambda_0$, je správne určené poistné $\overline{C}(\lambda_0)$. Ak je λ vyššia ako λ_0 , platí sa menej, ak je λ nižšia ako λ_0, tak poistné je vyššie ako by malo byť.

4 Efektívnosť iregulárneho systému

Efektívnosť $\varepsilon(\lambda)$, definovaná vzťahom (7) vyjadruje asymptotickú hodnotu, je teda použiteľná iba pre stabilizovaný BMS. Reálny BMS môže byť aj *iregulárny*, kedy limitné stacionárne rozdelenie neexistuje. Navyše, efektívnosť $\varepsilon(\lambda)$ má globálny charakter, je rovnaká pre všetky tarifné skupiny, čo nemusí odpovedať reálnej situácii. V takom prípade musíme vychádzať pri definícii efektívnosti nie z priemerného poistného, ale zo skutočných diskontovaných nákladov na poistenie.

Označme si ako $v_i(\lambda)$ diskontované náklady poistenca, ktorý sa nachádza v i-tej tarifnej skupine na začiatku periódy. Nech diskontný faktor $\beta<1$.Potom vektor $(v_1(\lambda), v_2(\lambda), ..., v_K(\lambda))$ vyhovuje sústave rovníc

$$v_i(\lambda) = c_i + \beta \cdot \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) \cdot v_{T_k(i)}(\lambda), \quad i = 1,2,...,K \quad , \tag{13}$$

kde $p_k(\lambda)$ je pravdepodobnosť nastatia k škôd a index $T_k(\ i\ ) = j$, ak poistenec, ktorý bol v triede i na začiatku periódy, prejde do triedy j po nahlásení k škôd počas periódy. Potom použitím vety o pevnom bode dá sa dokázať (pozri [2], str.169), že $v_i(\lambda)$, i=1, 2, ...,K je jediným riešením sústavy (13).

Teraz môžeme zadefinovať efektívnosť v iregulárnom BMS ako relatívnu elementárnu zmenu diskontovaných nákladov poistenca ku relatívnej elementárnej zmene intenzity škôd

$$\varepsilon_i^*(\lambda) = \frac{\mathrm{d}v_i(\lambda)}{v_i(\lambda)} \Big/ \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \ . \tag{14}$$

Podobnými úpravami derivácie $\mathrm{d}\ln v_i(\lambda)/\mathrm{d}\ln\lambda$, ako pri odvodení vzťahu (10), dostávame

$$\varepsilon_i^*(\lambda) = \frac{\mathrm{d}\ln v_i(\lambda)}{\mathrm{d}\ln\lambda} \ . \tag{15}$$

Deriváciou (13) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}v_i(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \beta \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\mathrm{d}p_k(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \cdot v_{T_k(i)}(\lambda) + p_k(\lambda) \cdot \frac{\mathrm{d}v_{T_k(i)}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \right] . \tag{16}$$

Opäť sa dá ukázať, že sústava (16) má jediné riešenie.

V prípade, že rozdelenie počtu poistných udalostí za periódu je Poissonove s konštantnou intenzitou λ, teda platí

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}p_k(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{k!} \cdot \left[k \cdot \lambda^{k-1} \cdot e^{-\lambda} - \lambda^k \cdot e^{-\lambda} \right],$$

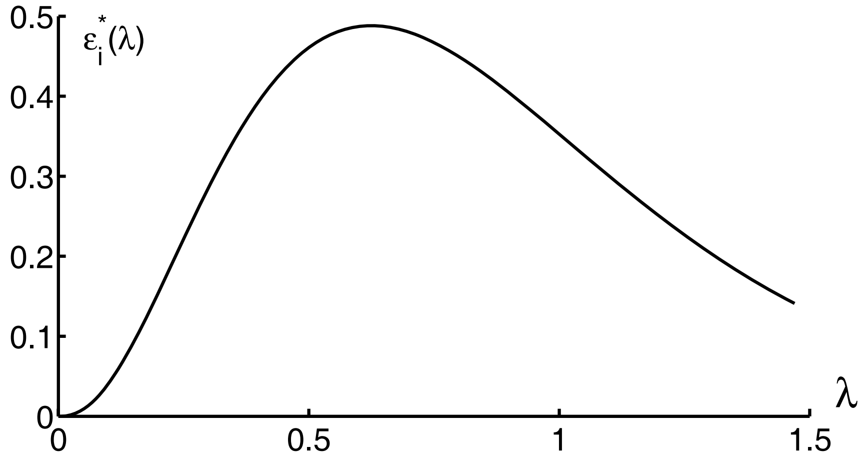
po dosadení do (16) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}v_i(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \beta \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\lambda}}{k!} (k-\lambda) \cdot \lambda^{k-1} \cdot v_{T_k(i)}(\lambda) + \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{\mathrm{d}v_{T_k(i)}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \right] =$$
$$= \beta \cdot \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\mathrm{k}} \cdot e^{-\lambda}}{k!} \left[\left(\frac{k}{\lambda} - 1 \right) \cdot v_{T_k(i)}(\lambda) + \frac{\mathrm{d}v_{T_k(i)}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \right] \ .$$

Poznámka:

Pri konštrukcii nového BMS sa odporúča (pozri [2]) zvoliť si za počiatočnú tarifnú triedu tú, ktorá maximalizuje efektívnosť $\varepsilon_i^*(\lambda)$. Priebeh závislosti tejto efektívnosti na intenzite je znázornený na obrázku č.1. podľa vyššie uvedeného zdroja pre belgický BMS.

Obr.č.1: Závislosť efektívnosti na intenzite



Pri porovnávaní dvoch BMS môžu nastať problémy, keďže $\varepsilon_i^*(\lambda)$ je funkciou λ . Ale ak poznáme rozdelenie *F(λ)* intenzity λ , tak problém sa dá riešiť zavedením tzv. *globálnej efektívnosti* , definovanej vzťahom

$$\varepsilon_i^* = \int_0^\infty \varepsilon_i^*(\lambda)\cdot \mathrm{d}F(\lambda)\,. \tag{17}$$

V ďalšej časti sa budeme venovať práve problému znáhodnenia intenzity λ.

5 Znáhodnenie intenzity výskytu škôd

Znáhodnenie intenzity λ výskytu poistných udalostí spočíva v tom, že parameter λ v Poissonovom rozdelení počtu škôd za periódu nepovažujeme za konštantu, ale za náhodnú veličinu. Modelujeme tak *heterogénne portfólio*, v ktorom jednotliví poistenci nemajú rovnaké riziko, reprezentované intenzitou λ . Podľa [3] vhodným rozdelením λ sa javí dvojparametrové gama rozdelenie $\Gamma(a,\, b\,)$, dané hustotou

$$f(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(a)}\cdot b^a \cdot \lambda^{a-1}\cdot e^{-b\lambda} \quad , \quad \lambda. > 0,\;\; a > 0,\;\; b > 0\,. \tag{18}$$

Využitím vlastností gama funkcie: $\Gamma(s+1) = s.\Gamma(s)$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\cdot e^{-x}\mathrm{d}x$,

ľahko odvodíme strednú hodnotu a disperziu : $E(\lambda) = a/b$, $D(\lambda) = a/b^2$. Ukážeme ešte, že ak intenzita Poissonovho rozdelenia λ je náhodná veličina s rozdelením $\Gamma(\,a,\, b\,)$, tak rozdelenie p_k, $k = 0, 1, 2, ...$počtu poistných udalostí Y v uvažovanom heterogénnom portfóliu je negatívne binomické s parametrami : $a,\; b/(1+b)$. Podľa vzťahu medzi marginálnym, združeným a podmieneným rozdelením a využitím hustoty zo vzťahu (18) dostávame

$$p_k = \int_0^\infty p_k(\lambda)\cdot \mathrm{d}F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\cdot f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \;=\; \int_0^\infty \frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}\cdot\frac{1}{\Gamma(a)}b^a\cdot\lambda^{a-1}\cdot e^{-b\lambda}\mathrm{d}\lambda\,.$$

Po substitúcii: $(b+1)\lambda = y \in (0,\infty)$, $\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\,y/(b+1)$

$$p_k = \frac{1}{\Gamma(a)\cdot k!}\cdot b^a \cdot \int_0^{\infty}\left(\frac{y}{b+1}\right)^{k+a-1} \cdot e^{-y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{b+1} = \frac{b^a}{(b+1)^{a+k}\,\Gamma(a)\cdot k!}\cdot \Gamma(a+k)\,.$$

Po úprave a využití zovšeobecneného kombinačného čísla

$$p_k = \binom{a+k-1}{k}\cdot\left(\frac{b}{1+b}\right)^a\cdot\left(1-\frac{b}{1+b}\right)^k \quad , \quad \mathrm{k} = 0,1,2,\dots,$$

čo znamená, že ide naozaj o *negatívne binomické rozdelenie* NB(a, $b/(1+b)$), pričom stredná hodnota a disperzia budú: $E(Y) = a/b$, $D(Y) = a(1+b)/b^2$.

V heterogénnych BMS okrem negatívne binomického rozdelenia by sme mohli uvažovať aj iné vhodné rozdelenia, napr. zovšeobecnené geometrické alebo zmiešané Poissonovo rozdelenie (pozri napr.[2]). Posledne menované rozdelenie sa používa v idealizovanom prípade, kedy všetkých poistencov (vodičov) možno zatriediť do dvoch tarifných tried: „dobrí a zlí“ a tak výsledné rozdelenie počtu škôd je vážený priemer dvoch Poissonových rozdelení.

Poznámka: táto práca je podporovaná grantom VEGA č. 1/0724/08 Riadenie rizík neživotného poistenia podľa direktívy Európskej komisie SOLVENCY II.

Literatúra

[1] FECENKO, J., SZÉPOVÁ, H.: *Optimalizácia správania sa poistenca v systéme bonus-malus*. Ekonomika a informatika, 4(2005), s. 26-37.

[2] LEMAIRE, J.: *Automobile Insurance - Actuarial Models*. Kluwer-Nijhoff Publishing, Boston, 1996.

[3] PACÁKOVÁ, V.: *Aplikovaná poistná štatistika*. Ekonóm, Bratislava, 1998.

[4] SKŘIVÁNKOVÁ, V.: *Náhodné procesy a ich aplikácie*. UPJŠ, Košice, 2004.

[5] SKŘIVÁNKOVÁ, V., FECENKO, J.: *Rizikové poistné v stabilizovanom systéme bonus-malus*. Zb.6.vedeckého seminára „ Aktuárska veda v teórii a v praxi“, Bratislava, 2007 (CD-room, s.1-6)

Summary

Efficiency of bonus-malus system

Efficiency is a suitable criterion for judging of bonus-malus system (BMS) quality and for the comparing of two different systems. In this paper, we consider first an asymptotic criterion for homogeneous and stable BMS and then a criterion for the non asymptotic and heterogeneous case. After the basic model, where Poisson distribution with constant parameter λ is used, we consider the generalized case when parameter λ is a random variable with gamma distribution. We point to, that the distribution of the number of claims in this heterogeneous case is negative binomial.